תרגול כיתה 7 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגויות רציפות מיוחדות

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות

1). התפלגות אחידה רציפה $X \sim U(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & else \end{cases}$$

התוחלת והשונות: $V(X) = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ $\quad E(X) = \dfrac{\beta+\alpha}{2}$

2). התפלגות מעריכית $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

פונקצית הצפיפות: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

התוחלת והשונות: $V(X) = 1/\lambda^2$ $\quad E(X) = 1/\lambda$

הערה: בהתפלגות זו (בדומה להתפלגות הגיאומטרית) קיימת תכונת "חוסר הזכרון":
$P(X = s+t \mid X = t) = P(X = s)$, לכל $s,t \ge 0$.

3). התפלגות גמה $X \sim Gamma(\lambda,\alpha)$, $\lambda,\alpha > 0$.

פונקצית הצפיפות: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

התוחלת והשונות: $V(X) = \alpha/\lambda^2$ $\quad E(X) = \alpha/\lambda$

חישוב פונקציית גמה: כאשר α טבעי $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$,

אחרת $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

תרגיל 1

אדם מגיע לתחנת אוטובוס בשעה 10:00. ידוע כי האוטובוס יגיע ברגע כלשהו בין 10:00 ל-10:30.

1. מהי ההסתברות שיצטרך להמתין למעלה מ-10דקות?
2. אם עד 10:15 לא הגיע האוטובוס, מה הסיכוי שיצטרך עדיין להמתין עוד 10 דקות?

תרגיל 2

משך הזמן (בשעות) הדרוש לתיקון מכונה הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם הפרמטר $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על שעתיים.
2. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על 10 שעות בהינתן שהוא מעל 9 שעות.
3. מהי תוחלת זמן התיקון?

תרגיל 3

אדם קולע למטרה. פגיעה במרחק שאינו עולה על ס"מ אחד מהמטרה מזכה אותו ב-10 נקודות, פגיעה במרחק שבין 1 ס"מ ל-3 ס"מ מזכה אותו ב-5 נקודות, ופגיעה במרחק שבין 3 ס"מ ל-5 ס"מ מזכה אותו ב 3 נקודות. מצא תוחלת מספר הנקודות שצבר, אם למרחק בין המטרה לנקודה שבה פגע יש התפלגות גמה עם הפרמטרים $\alpha = 2$ ו- $\lambda = 1/3$.

תוחלת ושונות מותנה, תוחלת ושונות נשנית, שונות משותפת ומתאם

נוסחאות

תוחלת מותנה:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x\, \mathrm{P}(X = x \mid Y = y) = \sum_x x\, \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(Y = y)}$$

תוחלת נשנית:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(X\mid Y\right)\right)=\sum_{y}\mathrm{E}(X\mid Y=y)\cdot\mathrm{P}(Y=y)$$

שונות נשנית:

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\mid X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathrm{E}\left(Y\mid X\right)\right)$$

<u>תרגיל 4</u>

יואב וחנן זורקים לסל כדורים לסירוגין. יואב קולע בסיכוי 0.7 וחנן בסיכוי 0.4.

חנן מתחיל. המשחק נעצר כאשר חנן קולע ראשון.

א). מהי תוחלת מספר הקליעות של יואב בזמן זה?

ב). מהי השונות?

<u>תרגיל 5</u>

במשחק מזל מטילים קוביה הוגנת פעם אחת. תהי N תוצאת ההטלה. כעת מטילים מטבע N פעמים המטבע שמצידו האחד חקוק "1" ומצידו האחר "0". הסתברויות הטלת המטבע C הן: $P\left(C=0\right)=1-p,\ \ P\left(C=1\right)=p,\ \ p\in\left(0,1\right)$. הרווח בכל הטלת המטבע היא תוצאת ההטלה. מהי תוחלת סה"כ הרווח במשחק ומהי שונותו?

<u>תרגיל 6</u>

נסמן $W=E(X\mid Y)$ ו-$T=E(W\mid X)$. הוכח ש-$V(T)\le V(X)$.

<u>תרגיל 7</u>

מטילים קוביה הוגנת n פעמים. נגדיר את המ"מ הבאים: X – מס' הפעמים שהתקבל 6, Y – מס' הפעמים שהתקבל 5. חשב את $Cov\left(X,Y\right)$.

<u>תרגיל 8</u>

מטילים מטבע הוגן n פעמים $\Omega = \left\{ H, T \right\}^n$. נגדיר: X – מס' הפעמים שהתקבל "H", Y – מס' הפעמים שהתקבל "T". חשב את המתאם $\rho\left(X, Y \right)$.

<u>תרגיל 9</u> [מתוך בוחן אמצע סמסטר 2011 סמסטר ב', מרצה פרופ' וישנה]

בהינתן משתנים מקריים X,Y,Z נאמר כי Z מפריד את X ו Y אם לכל ערך c של Z, $X \mid Z=c$ בלתי-תלוי ב- $Y \mid Z=c$. הוכח כי אם Z מפריד את X ו Y וגם Z בלתי-תלוי ב X אזי X בלתי-תלוי ב Y.