לינארית להנדסה- תרגיל 12

תרגיל 1. חשבו את הדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

תרגיל 2. ידוע כי המספרים $61902,\ 6327,\ 86469,\ 31882,\ 23028$ מתחלקים ב-19 ללא שארית. הראו (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-19 ללא שארית .רמז : שימו לב שעמודות במטריצה הן המספרים המוזכרים בשאלה

תרגיל 3. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס או״נ. נגדיר מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך : עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

1. הוכיחו כי $P^tP = I$
2. הוכיחו $det(P) \in \{1, -1\}$

תרגיל 4. מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ נקראת בלוק ג׳ורדן (אין זה מתייחס לחסימה של מייקל ג׳ורדן) מסדר n עם סקלר α מצאו את הע״ע והווקטורים העצמים של בלוק ג׳ורדן מסדר 4, משמע המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

תרגיל 5. יהיה v וקטור עצמי של המטריצה A ששייך לערך העצמי λ.

1. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^k $(k \in \mathbb{N})$ ששייך לערך עצמי λ^k.
2. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה $A^3 - 2A + I$ ששייך לערך עצמי $\lambda^3 - 2\lambda + 1$.
3. הראה שאם $\lambda \neq 0$ אז x הוא ווקטור עצמי גם של A^{-1} (הנחה ש-A הפיכה)

תרגיל 6. הוכיחו ש- A לא הפיכה אם ורק אם קיים לה ע״ע $\lambda = 0$

תרגיל 7. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל $\mathbb{R}$
2. מעל $\mathbb{C}$

תרגיל 8. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$

תרגיל 9. הוכח או הפרך : האם העתקות הבאות הן העתקות לנאריות?

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$$

2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. תהי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי. תהי $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר

$$T(A) = AB - BA$$

תרגיל 10. תהי T העתקה לינארית הוכיחו ש-

1. $T(0)=0$
2. יהיו $v_1,...v_n$ כך ש- $T(v_1),\ldots T(v_n)$ בת"ל הוכח ש- $v_1,...v_n$ גם כן בת"ל
3. יהיו $v_1,...v_n$ בת"ל ו-T ה"ל חח"ע (כמו שהוגדר בבדידה) הוכיחו ש- $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בת"ל

תרגיל 11. מצאו הע"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ כך ש-$Im(T)=Span\left\{1+2x,x^2+x\right\}$ ו-$ker(T)=Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

בהצלחה!!