פתרון תרגיל 6

1.א. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $[1,2]$. עבור x קבוע בקטע $[1,2]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n}=0$$

לכן הסדרה מתכנסת באופן נקודתי ל- $f\equiv 0$. סדרת הפונקציות גם מתכנסת במידה שווה, אפשר

להראות זאת בדיוק כמו שהראינו התכנסות נקודתית ושימוש בכך ש- $\sup_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{1+2^n x^n}\right|=\frac{1}{1+2^n}$.

ב. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $\left[\frac{1}{2},2\right]$. נניח x מספר קבוע בקטע $\left[\frac{1}{2},2\right]$,

אם $\frac{1}{2}<x\le 2$ אז הביטוי $2x$ הוא שבר שגדול מאחד ולכן $2^n x^n\to\infty$ כאשר $n\to\infty$. לכן

עבור $\frac{1}{2}<x\le 2$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}=0 .$$

אם $x=\frac{1}{2}$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} .$$

לכן קיבלנו ש-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}<x\le 2\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2}\end{cases} .$$

כיוון שקיבלנו שסדרת הפונקציות הרציפות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה נובע

שההתכנסות היא לא במידה שווה.

ג. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x}$ כאשר $0\le x<\infty$. כדי לחשב התכנסות נקודתית נבדיל בין שני מקרים. אם $x=0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\lim_{n\to\infty} 0=0 .$$

אם $x>0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} nxe^{-n^2x}=x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n^2x}}=0$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש- n הוא ביטוי אלגברי ו- e^{n^2x} הוא ביטוי מעריכי עבור $x>0$.

לכן סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לאפס. נבדוק התכנסות במידה שווה, לכן קודם נמצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $f_n(x)$ לכל n. ע"י גזירה נקבל

$$f_n'(x)=ne^{-n^2x}\left(1-n^2x\right)$$

אם נשווה לאפס ונחלץ את x נקבל $x=\frac{1}{n^2}$ ואז $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}e^{-1}$ וקל לבדוק שזהו ערך מקסימלי (לא מינימלי) של $f_n(x)$. לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge0}\left|f_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{-1}=0$$

ולכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ד. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$ כאשר $0<x<\infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x>0$, נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} x^ne^{-n^2x}$. נוכיח שהגבול שווה לאפס שזה שקול להוכיח ש- $\lim_{n\to\infty}\ln\left(x^ne^{-n^2x}\right)=-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(x^ne^{-n^2x}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(x^n\right)+\ln\left(e^{-n^2x}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\ln(x)-n^2x\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln(x)-n^2x\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(x)-nx\right)=\infty\cdot(-\infty)=-\infty.$$

לכן $\lim_{n\to\infty} x^ne^{-n^2x}=0$. נבדוק אם ההתכנסות היא במידה שווה, נגזור את $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$

$$f_n'(x)=nx^{n-1}e^{-n^2x}\left(1-nx\right)$$

ואם נשווה לאפס ונחלץ את x נקבל $x=\frac{1}{n}$. ע"י חישוב נקבל $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}e^{-n}$, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge 0}\left|f_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}e^{-n}=0$$

לכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ה. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ כאשר $|x|<\infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $t\sim 0$ (כלומר t מאוד קרוב לאפס) אז $\sin(t)\sim t$ ולכן אם x קבוע ו- $n>>0$ (כלומר n מספר גדול מאוד) אז $\sin\left(\frac{x}{n}\right)\sim\frac{x}{n}$. לכן

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{x}{n}=x$$

לכן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=x$. נבדוק התכנסות במידה שווה, נגדיר

לכל n טבעי את הפונקציה $g_n(x)=x-n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ ונמצא את הסופרמום של g_n כאשר $|x|<\infty$.

נתבונן בסדרה $x_n=2n$, אז

$$g_n(x_n)=g_n(2n)=2n-n\sin\left(\frac{2n}{n}\right)=2n-n\sin(2)\ge 2n-n=n\to\infty$$

כאשר $n\to\infty$. לכן לכל n טבעי הסופרמום של g_n הוא אינסוף ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה.

ו. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=(1-x)^{\frac{1}{2n+1}}$ כאשר $0\le x\le 2$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x=1$ אז $f_n(1)=0$ ולכן הגבול הנקודתי בנקודה זו הוא אפס. אם $0\le x<1$ אז נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left((1-x)^{\frac{1}{2n+1}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2n+1}\ln\left((1-x)\right)}=e^0=1$$

לכן $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1$ אם $0\le x<1$. באותו אופן אפשר להראות ש- $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=-1$ אם $1<x\le 2$.

לכן נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\\ -1, & 1<x\le 2\end{cases}$$

כיוון שהפונקציות f_n רציפות והפונקציה הגבולית לא רציפה אז אין התכנסות במידה שווה.

2. א. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin^n(x)$ כאשר $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. נבדוק האם הטור מתכנס במידה שווה. הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ולכן גם $\sin^n(x)$ מונוטונית עולה בקטע זה ולכן $0\le\sin^n(x)\le\sin^n\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. לכן נקבל ש-

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n\sin^n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\sin^n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}<\infty.$$

ולכן ממבחן ה- M נקבל התכנסות במידה שווה.

ב. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{n}}$ בקטע $[0,1]$. נבדוק התכנסות במידה שווה, קודם נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}-x^n$ ונוכיח שסדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה במידה שווה. אכן

$$\left|\sum_{n=1}^{m} x^{n+1}-x^n\right|=\left|x^{m+1}-x\right|\le 2$$

והאי שוויון נכון לכל x בקטע $[0,1]$ ולכל m טבעי. כמו כן סדרה הפונקציות $g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ היא מונוטונית יורדת ושואפת במידה שווה לאפס. לכן לפי משפט דריכלה הטור מתכנס במידה שווה.

ג. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ בקטע $[0,2)$. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $\varphi_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{2^n}=\frac{x}{2}\frac{2-\frac{x^m}{2^{m-1}}}{2-x}$ קל לבדוק שהגבול הנקודתי של הסדרה φ_m בקטע $[0,2)$ הוא $\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)=\frac{x}{2-x}$. כעת נגדיר

את הסדרה $g_m(x)=\varphi_m(x)-\frac{2}{2-x}=\frac{x}{2}\frac{2-\frac{x^m}{2^{m-1}}}{2-x}-\frac{2}{2-x}=-\frac{x^{m+1}}{2-x}$. כדי להוכיח התכנסות במידה שווה יש להראות ש- $\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le x<2}\left|g_m(x)\right|=0$. אבל ברור שלכל m, $\sup_{0\le x<2}\left|g_m(x)\right|=\infty$ ולכן אין התכנסות במידה שווה.

3. א. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx^2}$ בקטע $[1,2]$. הטור מתכנס בקטע $[1,2]$ כי אם $1\le x\le 2$ אז

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx^2}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}<\infty.$$

כמו כן טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty}-2nxe^{-nx^2}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[1,2]$ כי

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}-2nxe^{-nx^2}\right|\le 4\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-n}<\infty$$

ולכן ממבחן ה- M הטור מתכנס במידה שווה. לכן ממשפט על גזירה איבר איבר נקבל

$$-\frac{2xe^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2}=\left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx^2}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}-2nxe^{-nx^2}$$

ובפרט אם נציב $x=1$ נקבל

$$-\frac{2e^{-1}}{\left(1-e^{-1}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}-2ne^{-n}$$

או

$$.\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-n}=\frac{e^{-1}}{\left(1-e^{-1}\right)^2}$$

ב. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}$ כאשר $0\le x\le 2$. נוכיח שהטור מתכנס אם $0\le x\le 2$, אכן

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}<\infty.$$

כמו כן, טור הנגזרות

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}\right)'\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x(1-x)^{n-1}(1+x)^{n-1}}{(n-1)!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{n-1}}{(n-1)!}<\infty$$

ולכן הטור מתכנס במידה שווה ממבחן ה- M.

כעת נשים לב ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}$ שווה ל- e^{1-x^2}. אכן מפיתוח טיילור של e^x נקבל

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ואם נציב במקום x את הביטוי $1-x^2$ נקבל

$$e^{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}.$$

כיוון שניתן לגזור איבר איבר כאשר $0\le x\le 2$ נקבל

$$-2xe^{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x(1-x)^{n-1}(1+x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

אם נציב $x=2$ נקבל ונחלק ב- -4 נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{(n-1)!}=e^{-3}.$$

4. צריך להוכיח ש-

$$\frac{\arctan(t)}{2}+\frac{t}{2t^2+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)t^{2n+1}}{2n+1}\left(=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}-...\right)(*)$$

א. ניעזר בזהות

$$0\le x<1,\ \frac{1}{(1+x^2)^2}=1-2x^2+3x^4-4x^6+...$$

שנובעת מהזהות

$$0\le x<1,\ \ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...$$

מגזירה איבר איבר ואז חלוקה ב- $-2x$.

ב. עבור $0\le t<1$ קבוע טור הפונקציות בסעיף א מתכנס במידה שווה בתחום $0\le x\le t$ כי

$$\left|1-2x^2+3x^4-4x^6+...\right|\le 1+2t^2+3t^4+4t^6+...<\infty$$

וההתכנסות במידה שווה נובעת ממבחן ה- M.

ג. כעת ממשפט על אינטגרציה איבר איבר של טור חזקות נקבל שעבור $0\le t<1$ קבוע

$$\int_0^t \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_0^t 1-2x^2+3x^4-4x^6+...dx=\int_0^t dx-2\int_0^t x^2dx+3\int_0^t x^4dx-4\int_0^t x^6dx+...=$$

$$t-\frac{2t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)t^{2n+1}}{2n+1}.$$

כמו כן מהזהות $I_{m+1}=\frac{x}{2m\left(1+x^2\right)^m}+I_m\frac{2m-1}{2m}$ כאשר $I_m=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^m}$ נובע

ש- $\int_0^t\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\arctan(t)}{2}+\frac{t}{2t^2+2}$ וזה מוכיח את הזהות $(*)$.