טופולוגיה: 88-222-05
מרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: סולי ומני

תרגיל בית מספר 2

<u>שאלה 1</u>

יהי $\left(X,d\right)$ מ"מ.

א. הוכיחו כי לכל $x\in X$, $\left\{x\right\}$ תת קבוצה סגורה של X.

ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

<u>שאלה 2</u>

הראינו בכיתה את הטענה הבאה: בכל מרחב מטרי, כדור סגור הוא קבוצה סגורה. בהוכחת הטענה השתמשנו בהגדרת הקבוצה הסגורה דרך המשלים. הוכיחו כעת את אותה הטענה בשימוש ההגדרה השקולה לקבוצה סגורה (דרך סדרות). (מבלי להשתמש, כמובן, בהוכחה שראיתם/ן בתרגול!).

<u>משמע:</u> תהי $\left\{x_n\right\}\subseteq B\left[a,r\right]$, $x_n\to x$. הוכיחו כי $x\in B\left[a,r\right]$.

<u>שאלה 3</u>

<u>בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.</u>

יהי $\left(X,d\right)$ מ"מ. נגדיר מטריקה $\tilde{d}$ על X.

$$\tilde{d}\left(x,y\right)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ לכל $x,y\in X$.

א. הוכיחו כי אכן $\tilde{d}$ מטריקה.

ב. הוכיחו כי $\tilde{d}$ מטריקה חסומה.

<u>הערה:</u> מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r>0$ כך שלכל x,y מתקיים $\rho\left(x,y\right)\le r$.

ג. הוכיחו כי d ו- $\tilde{d}$ שקולות.

ד. הוכיחו כי d שקולה ל ρ באשר $\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$.

<u>שאלה 4</u> (המטריקה ה-a-אדית)

טופולוגיה: 88-222-05
מרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: סולי ומני

יהי $\left(\mathbb{Z},d_a\right)$ מ"מ עם המטריקה ה a-אדית.

א. הוכיחו ש $a^n \xrightarrow{d_a} 0$

ב. האם המטריקה ה-7-אדית שקולה למטריקה ה-5-אדית?

ג. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל $\mathbb{Z}$: d_Δ המטריקה הדיסקרטית , d_8 (המטריקה ה-8 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x,y)=|x-y|$.

<u>שאלה 5</u>

א. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y. נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

ב. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל Y. נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

<u>שאלת בונוס</u>

<u>הגדרה:</u>

יהיו d,ρ שתי מטריקות מעל X. נאמר ש- d שקולה ל- ρ במובן **ליפשיץ** אם קיימים קבועים $c_1,c_2>0$ כך שמתקיים $c_2\rho\left(x,y\right)\ge d\left(x,y\right)\ge c_1\rho\left(x,y\right)$ לכל $x,y\in X$.

א. הראו שאם שתי מטריקות שקולות במובן ליפשיץ אזי הן שקולות במובן הרגיל

(תזכורת: יהיו ρ,d שתי מטריקות על X. נאמר שהן שקולות אמ"מ:
$\{x_n\}\xrightarrow{\rho}x \iff \{x_n\}\xrightarrow{d}x$.)

ב. הראו שההיפך אינו נכון באמצעות מציאת דוגמא לשתי מטריקות אשר שקולות במובן הרגיל, אך אינן שקולות במובן ליפשיץ.

בהצלחה!