תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88־218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

1. הגדרה: פעולה של חבורה G על קבוצה X תיקרא טרנזיטיבית אם לכל $x_1, x_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש־ $g * x_1 = x_2$

   קבעו האם הפעולות הבאות טרנזיטביות או לא:

   (א) פעולת הכפל משמאל של חבורה על עצמה.

   (ב) פעולת ההצמדה של חבורה על עצמה.

   (ג) הפעולה של S_n על $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

   (ד) הפעולה של S_n על $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

2. תהי קבוצה $X = \{a, b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על X. מי מהן טרנזיטיבית?

3. יהיו $f \colon G \to H$ ו־$g \colon H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f \colon G \to K$ היא הומומורפיזם.

4. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

   (א) כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

   (ב) כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

   (ג) התמונה של כל הומומורפיזם $f \colon G \to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

שאלות רגילות

1. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e \neq x \in G$ מתקיים $x^{-1} \notin \mathrm{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של x לא שייך למחלקת הצמידות של x).

2. תהי G חבורה ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את המְרַכֵּז של S ב־G להיות

$$C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S, gs = sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s \in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

(א) הוכיחו שאם $S \subseteq T \subseteq G$, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

(ב) הוכיחו

$$C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s) = \bigcap_{s \in \langle S \rangle} C_G(s) = C_G(\langle S \rangle)$$

והסיקו כי $C_G(S) \leq G$.

(ג) תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש־$2 \leq |S|$ וגם $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב־$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

(ד) תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש־$2 \leq |S|$ וגם $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב־$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

3. הגדרה: דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ הוא שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב־$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של V.

(א) הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$. בנוסף הראו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

(ב) מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על i.

4. .

(א) מצאו את כל מחלקות הצמידות של D_4.

רמז: יש הרבה דרכים למצוא אותן, מבלי לחשב לכל איבר בנפרד לפי הגדרה. למשל אפשר להעזר בזה שכל איבר ניתן לכתוב בצורה $\tau^i \sigma^j$ או בכך שאתם כבר מכירים תת־חבורה נורמלית של D_4.

(א) תנו דוגמה לחבורה G, לתת־חבורה $H \leq G$ ולשני איברים $x, y \in H$ שהם צמודים ב־G, אבל אינם צמודים ב־H. רמז: הביטו למעלה.

5. יהי $f \colon G \to H$ הומומורפיזם.

הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{im} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

6. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש־$|X| > 2$, היא 2־טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו־$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש־$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

(א) הוכיחו שאם G פועלת 2־טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

(ב) הוכיחו כי G פועלת 2־טרנזיטיבית אם ורק אם G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ והפעולה היא רכיב־רכיב.

(ג) הוכיחו כי A_4 פועלת 2־טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$.

(ד) יהי F שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, אבל לא פועלת 2־טרנזיטיבית.

(ה) אם $|F| = 2$, הראו ש־$GL_2(F)$ כן פועלת 2־טרנזיטיבית.

שאלות אתגר

אם פתרתם את שאלות האתגר, ואין לשאלה פתרון, בבקשה שלחו לי את הפתרון שלהן.

1. יהי $\Psi \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

(א) הוכיחו שאם Ψ מקיים את שני התנאים:

- לכל $A, B \in \mathcal{L}$, אם $A \leq B$ אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$.
- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi^3 = \Psi$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

(ב) הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!