התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 7:הכריכה ושימושיה

1.הגדרת הכריכה ותכונותיה העיקריות

הגדרה 1.1:

יהיו הפונקציות $f(x), g(x)$ מוגדרות בכל הציר הממשי. הפונקציה $(f*g)(x)$ מוגדרת כך:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad x\in R \quad (1.1)$$

הפונקציה נקראת הכריכה (קונבולוציה) של הפונקציות $f(x), g(x)$.

המטרה שלנו – למצוא דרישות ל $f(x), g(x)$ שעבורן קיימת $(f*g)(x)$. אך תחילה נציין, שעבור תנאים כלשהם ל$f(x), g(x)$ הכריכה מקיימת את התכונה הנפלאה:

$$(f*g)(\sigma)=\sqrt{2\pi}\, f(\sigma)g(\sigma), \quad \sigma\in R \quad (1.2)$$

(התמרת הפורייה של הכריכה שווה למכפלת התמרות הפורייה של הפונקציות עם מקדם קבוע)

לכן בהמשך יחד עם תנאי קיום הכריכה והתכונה שלה, אנו את תנאי קיום (1.2).

משפט 1.1:

יהיו הפונקציות $f(\cdot), g(\cdot)$ שייכות ל $L_1(R)\cap C(R)$. אזי מתקיימות הטענות:

1. הכריכה $\left(f*g\right)(x)$ קיימת עבור $\forall x\in R$, כלומר האינטגרל (1.1)

$$h(x)=\left(f*g\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt,\quad x\in R \quad (1.1)$$

קיים $\forall x\in R$.

2. $\left(f*g\right)(x)\in L_1(R)\cap C(R)$

3. $\left(f*g\right)(\sigma)=\sqrt{2\pi}\, f(\sigma)g(\sigma),\quad \sigma\in R \quad (1.3)$

- המספור משתנה בהמשך כי חסרה כאן הוכחה, נוסיף אותה אחר כך (בתקווה לקראת סוף הקורס).

משפט 1.2:

יהיו $f(x)\in L_2(R), g(x)\in L_2(R)$. אזי הכריכה $h(x)$ של הפונקציות הינה רציפה וחסומה, כאשר

$$\lim_{|x|\to\infty} h(x)=0 \quad \left(h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt\right) \quad (1.16)$$

(1.17) נסמן $f(\sigma), g(\sigma)$ -התמרות הפורייה ב$L_2(R)$ של הפונקציות $f(\cdot), g(\cdot)$ בהתאמה.

אם הפונקציה $\varphi(\sigma)=f(\sigma)\cdot g(\sigma)$ הינה פונקציה רציפה וחלקה למקוטעין, אז מתקיים השוויון:

$$\left(f*g\right)(\sigma)=\sqrt{2\pi}\, f(\sigma)\cdot g(\sigma) \quad (1.17)$$

משפט 1.3:

יהי $f\in L_1(R), g\in L_1(R)$ אזי $(f*g)(x)$ קיימת כמעט לכל x, ומתקיים $(f*g)(x)\in L_1(R)$ ומתקיים שוויון (1.17).

משפט 1.4:

אם $f\in L_2(R), g\in L_1(R)$ אז הכריכה $(f*g)\in L_2(R)$ ומתקיים (1.17).

2.תרגילים לחישוב הכריכה

תרגיל 1 (של המרצה):

מצא את הכריכה עבור הפונקציות הבאות ובדוק עבורן את משפט 1.1:

$$f(x)=e^{-2|x|},\quad g(x)=e^{-|x|}$$

פתרון:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}\cdot e^{-|t-x|}dt=\int_{-\infty}^{x}e^{-2|t|}\cdot e^{-|t-x|}dt+\int_{x}^{\infty}e^{-2|t|}\cdot e^{-|t-x|}dt=$$

$$=\left[\begin{matrix}x\ge t\Rightarrow x-t\ge 0\\ |x-t|=x-t\end{matrix}\right\};\left\{\begin{matrix}x\le t\Rightarrow t-x\ge 0\\ |t-x|=t-x\end{matrix}\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}e^{-2|t|}\cdot e^{t-x}dt+\int_{x}^{\infty}e^{-2|t|}\cdot e^{x-t}dt\Rightarrow$$

$$(f*g)(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}e^{t-2|t|}dt+e^{x}\int_{x}^{\infty}e^{-2|t|-t}dt\quad(2.1)$$

כדי לפתוח את הביטוי ב(2.1), נחקור בנפרד את המקרים:

1. $\underline{\underline{x<0}}$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{t-2|t|}dt = [x<0 \Rightarrow t<0] = \int_{-\infty}^{x} e^{t+2t}dt = \boxed{\frac{e^{3x}}{3}} \quad (a)$$

$$\int_{x}^{\infty} e^{-2|t|-t}dt = \int_{x}^{0} e^{-t}e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t-2t}dt = e^{t}\Big|_{x}^{0} - \frac{e^{-3t}}{3}\Bigg|_{0}^{\infty} \quad (b)$$

$$= 1 - e^{x} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{3} - e^{x}}$$

$$\Rightarrow (f*g)(x) = [x<0] = e^{-x}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) + e^{x}\left(\frac{4}{3} - e^{x}\right) \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{4e^{x}}{3} - e^{2x} = \frac{4e^{x}}{3} - \frac{2e^{2x}}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{(f*g)(x) = \frac{4e^{x}}{3} - \frac{2e^{2x}}{3}}, \quad x<0 \quad (2.2)$$

$\underline{\underline{x>0}}$ .2

$$\int_{-\infty}^{x} e^{t-2|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t+2t}dt + \int_{0}^{x} e^{t-2t}dt = \left.\frac{e^{3t}}{3}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{t}}{3}\right|_{0}^{x} = \quad (a)$$

$$= \frac{1}{3} - e^{-x} + 1 = \boxed{\frac{4}{3} - e^{-x}}$$

$$\int_{x}^{\infty} e^{-t-2|t|}dt = \int_{x}^{\infty} e^{-3t}dt = -\left.\frac{e^{-3t}}{3}\right|_{x}^{\infty} = \boxed{\frac{e^{-3x}}{3}} \qquad (b)$$

$$\Rightarrow (f*g)(x) = e^{-x}\left(\frac{4}{3} - e^{-x}\right) + e^{x}\left(\frac{e^{-3x}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \frac{4e^{-x}}{3} - e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{3} = \frac{4e^{-x}}{3} - \frac{2e^{-2x}}{3} \Rightarrow$$

$$f*g = \begin{cases} \dfrac{4e^{-x}}{3} - \dfrac{2e^{-2x}}{3} & ,x>0 \\ \dfrac{4e^{x}}{3} - \dfrac{2e^{2x}}{3} & ,x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \frac{4e^{-|x|}}{3} - \frac{2e^{-2|x|}}{3}, \quad x \in R \quad (2.3)$$

אם כך, אצלנו $f \in L_1(R) \cap C(R)$, $g \in L_1(R) \cap C(R)$ $\Leftarrow$ (1.1)

1. הפונקציה $(f*g)(x)$ קיימת $\forall x \in R$

2. $(f*g)(x) \in L_1(R) \cap C(R)$ (טריוויאלי)

3. נשאר לנו לבדוק את השוויון:

$$\left(f*g \right)(\sigma)=\sqrt{2\pi}\, f(\sigma)g(\sigma),\quad \sigma\in R \quad (2.4)$$

נזכיר (הרצאה 2 פרק 3) שמתקיימת הנוסחא:

$$e^{-\alpha|x|}(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2},\quad \alpha>0 \quad (2.5)$$

אזי מ(2.3) ו(2.5) נובע:

$$\left(f*g \right)(\sigma)=\left[(2.3)\right]=\frac{4e^{-|x|}}{3}-\frac{2e^{-2|x|}}{3}(\sigma)=$$

$$=\frac{4}{3}e^{-|x|}(\sigma)-\frac{2}{3}e^{-2|x|}(\sigma)=\left[(2.5)\right]=\left[\alpha=1 \; and \;\; \alpha=2\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\sigma^2}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{2^2+\sigma^2}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+\sigma^2}-\frac{2}{4+\sigma^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4+\sigma^2-1-\sigma^2}{\left(1+\sigma^2\right)\left(4+\sigma^2\right)}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{\left(1+\sigma^2\right)\left(4+\sigma^2\right)}=$$

$$=4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)\left(4+\sigma^2\right)},\quad \sigma\in R \quad (2.6)$$

מצד שני:

$$\sqrt{2\pi}\, f(\sigma)g(\sigma)=\sqrt{2\pi}\,e^{-2|x|}(\sigma)\cdot e^{-|x|}(\sigma)=\left[(2.5)\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\sigma^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\sigma^2}=\frac{4\sqrt{e}}{\pi}\frac{1}{1+\sigma^2}\frac{1}{4+\sigma^2}\Rightarrow (2.4)$$

מש"ל.

תרגיל:

מצא את הכריכה $\left(f*g\right)(x)$,אם

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 1\ ,|x|<a \\ 0\ ,|x|\geq a \end{cases},a>0$$

פתרון (של המרצה):

נשתמש במשפט הבא:

משפט 2.1:

אם קיימת הכריכה $\left(f*g\right)(x)$ אז מתקיים:

$$\left(f*g\right)(x)=\left(g*f\right)(x)\quad (2.7)$$

הוכחה:

$$\left(f*g\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt=\begin{bmatrix} x-t:=s\Rightarrow \\ t=x-s \end{bmatrix}=$$

$$=\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-s)g(s)(-1)ds=\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(x-s)ds=\left(g*f\right)(x)$$

כעת, נפתור את התרגיל:

$$\left(f*g\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

נפטר מקטע האינטגרציה הודות לפונקציה g ולנוסחא (2.7) $\Leftarrow$

$$=\left(g*f\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(s)f(x-s)ds=\int_{-a}^{a}f(x-s)ds=\left[x-s:=\xi\right]=$$

$$=\int_{x+a}^{x-a}f(\xi)(-1)d\xi=\int_{x-a}^{x+a}f(\xi)d\xi\Rightarrow$$

$$\left(f*g\right)(x)=\int_{x-a}^{x+a}f(\xi)d\xi,\quad x\in R\quad(2.8)$$

בקשר להגדרת הפונקציה f והנוסחא (2.8), קיימים המקרים:

(1) $x+a<0$ (2) $x-a<0,x+a>0$ (3) $x-a\geq 0$

נחקור את המקרים בנפרד;

$$(1)x+a<0\Rightarrow[x-a,x+a]\subseteq(-\infty,0)\Rightarrow f(\xi)\equiv 0,\xi\in[x-a,x+a]$$

$$\Rightarrow\left(f*g\right)(x)=\int_{x-a}^{x+a}f(\xi)d\xi=\int_{x-a}^{x+a}0d\xi=0$$

$$(2)x-a<0,x+a>0\Rightarrow$$

$$f(\xi)=\begin{cases}0 & ,\xi\in[x-a,0)\\ e^{-a\xi} & ,\xi\in[0,x+a]\end{cases}\Rightarrow\left(f*g\right)(x)=\int_{x-a}^{x+a}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{0}^{x+a}e^{-a\xi}d\xi=-\frac{e^{-a\xi}}{a}\Bigg|_{0}^{x+a}=-\frac{1}{a}\left[e^{-ax-a^2}-1\right]=\frac{1-e^{-ax-a^2}}{a}$$

$$(3)x-a\geq 0\Rightarrow[x-a,x+a]\subseteq[0,\infty)\Rightarrow$$

$$f(\xi)=e^{-a\xi},\xi\in[x-a,x+a]\Rightarrow$$

$$\left(f*g\right)(x)=\int_{x-a}^{x+a}f(\xi)d\xi=\int_{x-a}^{x+a}e^{-a\xi}d\xi=-\frac{e^{-a\xi}}{a}\Bigg|_{x-a}^{x+a}=$$

$$= -\frac{1}{a}\left[e^{-ax-a^2} - e^{-ax+a^2}\right] = \frac{e^{-ax}}{a}\left[e^{a^2} - e^{-a^2}\right] \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \begin{cases} 0 & , x \le -a \\ \dfrac{1-e^{-ax-a^2}}{a} & , -a \le x \le a \\ \dfrac{e^{-ax}}{a}\left[e^{a^2} - e^{-a^2}\right] & , x \ge a \end{cases}$$

3.שימוש בכריכה לפתרון משוואות אינטגרליות

3.1 משוואות אינטגרליות של פרדהולם אריק איבר (1866-1927)

משפט 3.1:

משוואה אינטגראלית ליניארית של פרדהולם מסדר 2 הינה מהצורה:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \quad (3.1)$$

כאשר $\varphi(x)$ - פונקציה לא ידוע. $K(x,t), f(x)$ פונקציות ידועות.

x,t משתנים ב$[a,b]$. λ מקדם קבוע.

הפונקציה $K(x,t)$ נקראת הגרעין של המשוואה האינטגרלית (3.1); אנו מניחים שהגרעין מוגדר בריבוע $\Phi = \{(x,t) : x \in [a,b], t \in [a,b]\}, -\infty \le a < b \le \infty$ ורציפה שם.

אם $f(x) \not\equiv 0$ אז המשוואה (3.1) נראית כך:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \quad x \in [a,b] \quad (3.2)$$

ונקראת משוואת פרדהולם מסדר 2.

הגדרה 3.2:

משוואה אינטגראלית מהצורה:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x\in[a,b] \quad (3.3)$$

נקראת משוואה אינטגראלית של פרדהולם מסדר 1. נציין, שהמשוואה (3.3) בשונה מ(3.1) ו(3.2), לא מכילה את הפונקציה הדרושה $\varphi(x)$ באינטגרל.

הגדרה 3.3:

פתרון המשוואות האינטגראליות (3.1), (3.2) ו(3.3) היא פונקציה $\varphi(x)$ כלשהי שעבור הצבה במשוואה האחרונה הופכות לזהויות בתלות ב$x\in[a,b]$.

<u>3.2 משוואות אינטגרליות של פרדהולם עם גרעין, התלוי בהפרש הארגומנטים</u>

משוואת פרדהולם מהצורה:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\varphi(s)ds, \quad t\in R \quad (3.4)$$

נקראת משוואה (של פרדהולם) עם גרעין, התלוי בהפרש הארגומנטים משוואת כריכה.

משפט 3.1:

יהיו $f\in L_1(R), K(t)\in L_1(R)$ ו

$$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\sigma)\neq 0, \quad \sigma\in R \quad (3.5)$$

אזי המשוואה (3.5) בעלת פתרון $\varphi(t)\in L_2(R)$ וזהו פתרון יחיד ב$L_2(R)$ (כלומר כל פתרון אחר של (3.5) מתלכד עם $\varphi(t)$ כמעט בכל R)

נכתוב כעת תהליך נוסחתי, אשר מביא אותנו לפתרון - $\varphi(t)$ של המשוואה (3.4) לפי תנאי משפט 3.1

נפעיל התמרת פורייה על (3.4):

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) + \lambda \varphi * K(\sigma), \quad \sigma \in R \quad (3.6)$$

כיוון ש $K(t) \in L_1(R), \varphi(t) \in L_2(R)$ אז לפי משפט 1.4 מפרק 1 הכריכה $(\varphi * K)(t)$ קיימת ומתקיים:

$$\varphi * K(\sigma) = \sqrt{2\pi}\, \varphi(\sigma) K(\sigma), \quad \sigma \in R \quad (3.7)$$

נציב את (3.7) ב(3.6)

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) + \lambda \sqrt{2\pi} K(\sigma) \varphi(\sigma) \Rightarrow [see 3.5] \Rightarrow$$

$$\varphi(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\sigma)}, \quad \sigma \in R \quad (3.8)$$

לפי נוסחת ההפיכה של התמרת פורייה נקבל:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma) e^{-i\sigma x}}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\sigma)} d\sigma, \quad x \in R \quad (3.9)$$

תרגיל:

פתור את המשוואה:

$$\varphi(t) = e^{-|t|} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s) \varphi(s) ds \quad (3.10)$$

כאשר $K(t) = \begin{cases} e^t & ,t \le 0 \\ 0 & ,t > 0 \end{cases} \quad (3.11)$

פתרון:

בעזרת (3.11) נקבל:

$$\varphi(t)=e^{-|t|}+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(t-s)\varphi(s)ds=e^{-|t|}+$$

$$+\lambda\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{t}K(t-s)\varphi(s)ds}_{t-s>0}+\underbrace{\int_{t}^{\infty}K(t-s)\varphi(s)ds}_{t-s\le 0}\right\}=$$

$$=e^{-|t|}+\lambda\int_{t}^{\infty}e^{t-s}\varphi(s)ds\Rightarrow$$

הצורה ה"אמיתית" של המשוואה הינה:

$$\varphi(t)=e^{-|t|}+\lambda e^{t}\int_{t}^{\infty}e^{-s}\varphi(s)ds,\quad t\in R\quad(3.12)$$

אנו נשתמש בהצגה (3.12) למטרת בדיקה של הפתרון, שנמצא בהמשך לפי (3.9).

נפנה ל(3.9). במקרה שלנו:

$$f(t)=e^{-|t|}\Rightarrow F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty}e^{-|t|}e^{i\sigma t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(1+i\sigma)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{(i\sigma-1)t}dt\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{1+i\sigma}+\frac{1}{1-i\sigma}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\sigma^{2}}$$

כעת,

$$K(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{i\sigma t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{(1+i\sigma)t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\sigma}$$

נחשב, עבור אילו ערכי λ : $1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\sigma)\neq 0,\quad \sigma\in R$

מתקיים:

$$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\sigma)=1-\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\sigma}=\frac{1-\lambda+i\sigma}{1+i\sigma}$$ אזי

אם $\lambda\in(0,1)$ אז $\underline{\underline{\forall\sigma}}\in R$ $1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\sigma)\neq 0,$

אז נניח למשל $\lambda\in(0,1)$ לכן (ראה (3.9))

$$\frac{f(\sigma)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\sigma)}=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\sigma^2}}{1-\lambda+i\sigma}(1+i\sigma)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2}\frac{1}{1-\lambda+i\sigma}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1-i\sigma}\frac{1}{1-\lambda+i\sigma}\Rightarrow$$

לפי נוסחא (3.9)

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma t}d\sigma}{(1-i\sigma)(1-\lambda+i\sigma)},\quad t\in R\quad (3.13)$$

נחשב את האינטגרל (3.13) בעזרת שאריות. נבחין בין המקרים הבאים:

$$(1)\;\; t<0\quad (2)\;\; t>0\quad (3)\;\; t=0$$

(1) $\underline{\underline{t<0}}$ קל לראות, שהאינטגרל (3.13) קיים. ואכן, כיוון שלכל $\sigma \in R$ מתקיים האי שוויון:

$$\left|\frac{e^{-i\sigma t}d\sigma}{(1-i\sigma)(1-\lambda+i\sigma)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}\sqrt{(1-\lambda)^2+\sigma^2}} \le \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda} & ,|\sigma| \le 1 \\ \dfrac{1}{\sigma^2} & ,|\sigma| \ge 1 \end{cases}$$

אז האינטגרל (3.13) מתכנס ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma t}d\sigma}{(1-i\sigma)(1-\lambda+i\sigma)} = V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)e^{i\sigma(-t)}d\sigma$$

כאשר $-t>0$, $f(\sigma) = \dfrac{1}{(1-i\sigma)(1-\lambda+i\sigma)}$

בעזרת משפט (הרצאה 2, פרק 4, משפט 4.11), מתקיים:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)e^{i\sigma(-t)}d\sigma = 2\pi i\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{iz(-t)}\right)$$

כאשר הסכום הוא רק של קטבים בחצי המישור העליון. הפונקציה $f(z)$ בעלת 2 קטבים:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=-i, z_2=(1-\lambda)i \\ f(z)=\dfrac{1}{(1-iz)(1-\lambda+iz)},\ z\in C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma t}d\sigma}{\left(1-i\sigma\right)\left(1-\lambda+i\sigma\right)}=2i\sum_{k}\underset{(1-\lambda)i}{\mathrm{Re}\,s}\frac{e^{-izt}}{\left(1-iz\right)\left(1-\lambda+iz\right)}=$$

$$=2i\lim_{z\to\left(1-\lambda\right)i}(z-\left(1-\lambda\right)i)\frac{e^{-izt}}{\left(1-iz\right)\left(1-\lambda+iz\right)}=$$

$$=2i\lim_{z\to\left(1-\lambda\right)i}(z-\left(1-\lambda\right)i)\frac{e^{-izt}}{\left(1-iz\right)i\left(z-\left(1-\lambda\right)i\right)}=$$

$$=2\left.\frac{e^{-izt}}{\left(1-iz\right)}\right|_{z=\left(1-\lambda\right)i}=\boxed{\frac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)t}}$$

המקרים (2) ו(3) נבדקים בצורה דומה (ראה הרצאה 2 פרק 4 משפטים 4.12 ו4.13) ונשאירם לקורא.

אם כך,

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)t},t<0\\ \dfrac{2}{2-\lambda}e^{-t}\quad\ \ ,t\geq 0\end{cases}\qquad(3.14)$$

נבדוק כעת בעזרת (3.12) את הנוסחא (3.14). יהי למשל $t>0$. מ(3.12) נובע:

$$\varphi(t)=e^{-t}+\lambda e^{t}\int_{t}^{\infty}e^{-s}\frac{2}{2-\lambda}e^{-s}ds=e^{-t}+\frac{2\lambda}{2-\lambda}e^{t}\int_{t}^{\infty}e^{-2s}ds=$$

$$=e^{-t}+\frac{2\lambda}{2-\lambda}e^{t}\left[-\left.\frac{e^{-2s}}{2}\right|_{t}^{\infty}\right]=e^{-t}+\frac{2\lambda}{2-\lambda}\frac{e^{-t}}{2}=$$

$$=e^{-t}\left[1+\frac{\lambda}{2-\lambda}\right]=e^{-t}\,\frac{2-\lambda+\lambda}{2-\lambda}=\frac{2e^{-t}}{2-\lambda}$$

מש"ל. במקרה $t<0$ הבדיקה נעשית בצורה דומה.

תרגיל:

פתור את המשוואה האינטגרלית:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)dt$$

פתרון:

נפעל לפי דרך הפתרון הכללי, הנתונה לעיל.

$$\varphi(\sigma)=f(\sigma)+\lambda\sqrt{2\pi}\,\varphi(\sigma)e^{-|x|}(\sigma)\quad (3.15)$$

ידוע ש(ראה הרצאה 2, פרק 3, תרגיל 2):

$$e^{-|x|}(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\sigma^2}\Leftarrow$$ ב(3.15):

$$\varphi(\sigma)=f(\sigma)+\lambda\sqrt{2\pi}\,\varphi(\sigma)e^{-|x|}(\sigma)=$$

$$=\left[e^{-|x|}(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\sigma^2}\right]=f(\sigma)\frac{2\lambda}{1+\sigma^2}\varphi(\sigma)\Rightarrow$$

$$\varphi(\sigma)\left[1-\frac{2\lambda}{1+\sigma^2}\right]=f(\sigma)\Rightarrow$$

$$\varphi(\sigma)=\frac{1+\sigma^2}{1-2\lambda+\sigma^2}\,f(\sigma),\;\;\sigma\in R\quad (3.16)$$

על מנת שהחילוק ב(3.16) יהיה אפשר לכל $\sigma \in R$, נניח: $\boxed{\lambda < \frac{1}{2}} \Leftarrow 1-2\lambda > 0$

זאת אומרת, $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sigma^2}{1-2\lambda+\sigma^2} f(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (3.17)$$

$x \in R,\ \lambda < \frac{1}{2}$. תהי, לצורת הדוגמא; $\boxed{f(x) = e^{-|x|}, x \in R} \Leftarrow$ (ראה לעיל):

$$f(\sigma) = e^{-|x|}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\sigma^2} \Rightarrow$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sigma^2}{1-2\lambda+\sigma^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\sigma^2} e^{-i\sigma x} d\sigma =$$
$$= \frac{1}{\pi} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{1-2\lambda+\sigma^2} d\sigma,\ x \in R \quad (3.18)$$

האינטגרל (3.18) נחשב בעזרת שאריות, זה תהליך סטנדרטי (הרצאה 2, פרק 4) מתבצעת כרגיל ונשארת לקורא.

התשובה: $\boxed{\varphi(x) = \frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}, \lambda < \frac{1}{2}}$

הערה:

המשוואה האינטגרלית של פרדהולם מסדר 1 עם גרעין התלוי בהפרש הארגומנטים:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)\varphi(t)dt$$

פתירה בצורה דומה. הפתרון הינו מהצורה:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\sigma)}{K(\sigma)}e^{-ix\sigma}d\sigma$$

בתנאי ש: $K(\sigma)\neq 0,\forall\sigma\in R$.

4.שימוש קונבולוציה לפתרון משוואות עם נגזרות חלקיות

בהמשך נתבונן במשוואת החום:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ,x\in R,t>0 & (4.1)\\ \lim\limits_{t\to 0}u(x,t)=\varphi(x) & (4.2)\end{cases}$$

המטרה שלנו:

1. למצוא פתרון (אשר נוכיח את קיומו)
2. לקבוע את יחידות הפתרון

תכנון הצעדים הבאים שלנו: אנו נניח שהפתרון קיים, ולפי הנחה זו נבנה אותו (פורמלית). ובדרך נשים לב לדרישות שיתקבלו מהפעולות שלנו. אם אנו נצליח לבנות פתרון שיענה על כל הדרישות שאספנו מקודם, אזי התהליך שלנו יהיה מוצדק, והדרישות יהיו לתאר קבוצה שבה נמצא פתרון הבעיה (4.1)-(4.2).

נשים לב שהבעיה (4.1)-(4.2) נקראת בעיית קושי עבור המשוואה (4.1) עם תנאי התחלה (4.2).

נתחיל בביצוע של התוכנית שלנו.

1. עבור $t>0$ קבוע במשוואה (במקרה הנ"ל שוויון,כיוון שהפתרון קיים לפי ההנחה) נבצע התמרת פורייה לפי $x\in R$:

$$u_t'(x,t)=u_{x^2}''(x,t)\ \Rightarrow\ u_t(\sigma)=u_{x^2}''(x,t)(\sigma)\ ,\ t>0$$

את הפעולה הזו מספקת הדרישה:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\in L_1(R)\quad\forall t>0,\\ \int_{-\infty}^{\infty}\left|u_t'(x,t)\right|dx<\infty\end{array}}\qquad(4.3)$$

(מכאן והלאה לשם הנוחות, נשים במסגרת את הדרישות המספקות בניית הפתרון).

2. חישוב $u_t(\sigma)$

אם כך:

$$u_t'(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{i\sigma x}dx\ ,\ \forall\sigma\in R$$

נרצה להוציא את הנגזרת מחוץ לאינטגרל,ז"א לקבל את השוויון:

$$u_t'(\sigma)=\frac{\partial}{\partial t}(u(\sigma))$$

או, בכתיב מלא:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\sigma x}dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{i\sigma x}dx \quad (4.4)$$

שוויון (4.4) –כלל לייבניץ עבור המקרה (4.4).כדי לקבוע במדויק את הדרישות עבור $u(x,t)$,המספקות (4.4), נתאים את תנאי המשפט המספק כלל ליבניץ עם המקרה שלנו (ראה הרצאה 1 , משפט 2.3):

משפט 2.3 הרצאה 1:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

1. $f(x,y)$ מוגדרת על XOY
2. $\forall y \in R$ קיים $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x,y) \right| dx < \infty$
3. $\forall x,y \; \exists f_y'(x,y)$
4. פונקציה f_y' אינטגרבילית בקטע סופי.
5. קיימת פונקציה $g(x) \in L_1(R)$ כך ש- $\forall g \in R$ $\left| f_y'(x,t) \right| \le g(x)$

<u>ההתאמה:</u>

$$u(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\sigma x}dx$$

1. $u(x,t)$ מוגדרת על XOY, $T = (0,\infty)$
2. $\forall t \ge t_0 > 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x,t) \right| dx < \infty$

3. מתקיים בצורה אוטומטית, כיוון שהפתרון קיים

4. נדרוש: $u_t'(x,t) \in C(R)$

5. קיימת פונקציה $g(x)$ כך ש- $\begin{aligned} &|u_t'(x,t)| \le g(x) \ , \ \forall t \ge t_0 > 0 \\ &g(x) \in L_1(R) \end{aligned}$

<u>הדרישות שקיבלנו עבור $u(x,t)$:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)| dx < \infty \quad \forall t \ge t_0 > 0 \\ &u_t'(x,t) \in C(R) \quad \forall t \ge t_0 > 0 \\ &\begin{cases} |u_t'(x,t)| \le g(x) & \forall x \in R \ , \ \forall t \ge t_0 \\ g(x) \in L_1(R) \end{cases} \end{aligned}} \quad (4.5)$$

אזי, עם הדרישות (4.5) נקבל:

$$(u_t')(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t}(u(\sigma)) \ , \ \forall t \ge t_0 > 0 \quad (4.6)$$

3.חישוב $(u_{x^2}'')(\sigma)$

נרצה לקבל שוויונות:

$$(u_{x^2}'')(\sigma)=(-i\sigma)u_x'(\sigma)=(-i\sigma)^2(u)(\sigma)=$$
$$=i^2\sigma^2u(\sigma)=-\sigma^2u(\sigma)$$

השוויונות מתקיימים,אם (ראה הרצאה 4,משפט 3.3):

$$u(x,t)\in L_1(R)\ ,\ u_x'(x,t)\in L_1(R)\ ,\ u_{x^2}''(x,t)\in L_1(R)$$

אך הדרישה $u(x,t)\in L_1(R)$ עבור $\forall t\geq t_0$ כבר קיימת ב-(4.5). בהמשך, כיוון ש (ראה (4.1))

$$u_t'=u_{x^2}''$$

וכבר דרשנו כי $u_t'\in L_1(R)$, אזי כעת, אוטומטית $u_{x^2}''\in L_1(R)$ $\Leftarrow$ נשארה דרישה נוספת אחת:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_x'(x,t)\in L_1(R)\quad \forall t\geq t_0>0\quad or\\ \int_{-\infty}^{\infty}\left|u_x'(x,t)\right|dx<\infty\quad \forall t\geq t_0>0\end{array}}\quad (4.7)$$

אם כך, עבור הדרישה (4.6) נקבל:

$$(u_{x^2}'')(\sigma)=-\sigma^2u(\sigma)\quad (4.8)$$

4.משוואה עבור תמונת פורייה

סך הכול מתקיים:

$$\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial t}(u(\sigma))}} = u_t\,'(\sigma) = u_{x^2}\,''(\sigma) = \underline{\underline{-\sigma^2 u(\sigma)}}$$

זאת אומרת,שעבור $u(\sigma)$ אנו נקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(\sigma)) = -\sigma^2 u(\sigma)\ ,\ t \geq t_0 \quad (4.9)$$

הערה בהקשר ל (4.9) נזכיר ש-

$$u(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\sigma x} dx$$

זאת אומרת, $u(\sigma) = u(t,\sigma)$ פונקציה התלויה ב- t. כדי לפשט על הכתיבה ,נוריד את כתיבת המשתנה t.

אם כך,עבור תמונת פורייה $u(\sigma)$ אנו נקבל משוואה דיפרנציאלית רגילה (4.9), במקום משוואה עם נגזרות חלקיות (4.1) עבור המקור $u(x,t)$. המעבר ממשוואות עם נגזרות חלקיות למד"ר הינו היתרון העיקרי של התמרת פורייה האינטגראלית בהשוואה לשיטות אחרות. $\Leftarrow$ נפתור (4.9):

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(\sigma)) + \sigma^2 u(\sigma) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t}[e^{\sigma^2 t} u(\sigma)] = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\sigma^2 t} u(\sigma,t) = c(\sigma) \Rightarrow$$

$$u(\sigma,t) = u(\sigma) = c(\sigma) e^{-\sigma^2 t}\ ,\ t > 0 \qquad (4.10)$$

5.חישוב $c(\sigma)$

ב-(4.10), בהתאמה ל(4.2) נעבור לגבול עבור $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0} c(\sigma)e^{-\sigma^2 t} = c(\sigma) = \lim_{t\to 0} u(\sigma,t)$$

אנו רוצים לקבל שוויונות:

$$\lim_{t\to 0} u(\sigma,t) = \lim_{t\to 0} u(x,t)(\sigma) = u(x,0)(\sigma) = \varphi(\sigma)$$

נקבע עבור אילו דרישות עבור $u(x,t)$ יספקו אפשרות למעבר גבול הנ"ל:

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\sigma x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\to 0} u(x,t)e^{i\sigma x}dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx$$

כמו במקרה עם כלל לייבניץ נתאים תנאי הטענה ,המספקים את המעבר בתוך האינטגרל (הרצאה 1,מסקנה 3.7)

אם מתקיימים התנאים:

1. $\varphi_n(x) \in L_1(R) \quad \forall n \geq 1$
2. $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$ כמעט בכל מקום על R
3. $\exists\ F(x) \in L_1(R)$ כך ש $F(x) \in L_1(R)$(לפי רימן) ו-
$|\varphi_n(x)| \leq F(x)\ \forall x \in R\ ,\ n \geq 1$

אזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)dx$$

<u>בהתאמה:</u>

אם מתקיימים התנאים:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x,t) \right| dx < \infty \quad \forall t > 0$

2. $\lim_{t \to 0} u(x,t) = \varphi(x) \quad \forall x \in R$

3. $\exists\ F(x) \in L_1(R)$ כך ש$F(x) \in C(R) \bigcap L_1(R)$ ו-

$\left| u(x,t) \right| \le F(x) \ \ \forall t > 0$

אזי מתקיים:

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \to 0} u(x,t) e^{i\sigma x} dx$$

אם כך, קיבלנו את הדרישות המספקות את המעבר לגבול:

$$\boxed{\begin{cases} \left| u(x,t) \right| \le F(x), F(x) \in C(R) \bigcap L_1(R) \\ \forall t > 0 \end{cases}} \quad (4.11)$$

לכן קיבלנו:

$$\Leftarrow \quad c(\sigma) = \varphi(\sigma)$$

והתוצאה:

$$u(\sigma,t) = e^{-\sigma^2 t} \varphi(\sigma) \ , \ t > 0 \quad (4.12)$$

6.שימוש במשפט הקונבולוציה

נצטרך להשתמש בהתמרת פורייה ההפוכה עבור (4.12).נפעל לפי האלגוריתם:

$$u(x,t)=e^{-\sigma^2 t}\varphi(\sigma)(x,t)\ ,\ x\in R\ ,\ t>0 \quad (4.13)$$

כדי שהחישוב יהיה יעיל,נרשום ב-(4.12):

$$u(\sigma,t)=e^{-\sigma^2 t}\varphi(\sigma)\ ,\ t>0 \quad (4.12)$$

את הגודל $e^{-\sigma^2 t}$ כהתמרת פורייה:

$$e^{-\sigma^2 t}=\theta(x,t)(\sigma)\ ,\ \theta(x,t)=?$$

אזי לפי (4.12) נקבל:

$$u(x,t)=\theta(\sigma)\cdot\varphi(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta*\varphi(\sigma) \qquad \Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\theta*\varphi)(x,t) \qquad (4.14)$$

כעת נבצע את התוכנית הנ"ל. אם כך:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\to e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \qquad (f(x)\to f(\sigma))$$

(ראה הרצאה 2,פרק 3,תרגיל 5). בהמשך:

$$f(x)\to F(\sigma)\ \Rightarrow\ f(ax)\to\frac{1}{|a|}F(\frac{\sigma}{a})\ ,\ a\neq 0$$

(ראה הרצאה 4, פרק 4, משפט 4.1) $\Leftarrow$

$$f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} \;\Rightarrow\; f(ax) = e^{-\frac{(ax)^2}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{|a|} e^{-(\frac{\sigma}{2})^2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{|a|} e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{(ax)^2}{2}} \rightarrow \frac{1}{|a|} e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}} \;,\; a \neq 0$$

נניח:

$$\frac{1}{2a^2} = t \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{\sqrt{2t}} \;\Rightarrow$$

$$f(\frac{x}{\sqrt{2t}}) = e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \bigg|_{a=\frac{1}{\sqrt{2t}}} = e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{|a|} e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}} \bigg|_{a=\frac{1}{\sqrt{2t}}} = \sqrt{2t} e^{-\sigma^2 t} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow e^{-\sigma^2 t} \;,\; t > 0} \qquad (4.15)$$

לכן,

$$u(x,t)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}(\sigma,t) \cdot \varphi(x)(\sigma) \;,\; t > 0 \quad \Rightarrow$$

$$u(\sigma,t) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}(\sigma,t) \cdot \varphi(x)(\sigma) \;,\; t > 0 \;\; (4.15')$$

נתאים כעת משפט 1.1 (ראה פרק 1 לעיל) עם ('4.15)

משפט 1.1:

יהיו $f,g\in C(R)\bigcap L_1(R)$ אזי

1. $\forall x\in R\ \ \exists t\ (f*g)(x)$
2. $(f*g)(x)\in C(R)\bigcap L_1(R)$
3. $f*g(\sigma)=\sqrt{2\pi}\,f(\sigma)g(\sigma)$

<u>בהתאמה:</u>

1. עבור $t>0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\in C(R)\bigcap L_1(R)$$

2. נדרש: $\varphi(x)\in C(R)\bigcap L_1(R)$.

$$\boxed{\varphi(x)\in C(R)\bigcap L_1(R)} \quad (4.16)$$

מ-(4.16) נובע

$$\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}(\sigma,t)\cdot\varphi(x)(\sigma)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}*\varphi(x)(\sigma)$$

והתוצאה:

$$u(x,t)(\sigma)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}*\varphi(x)(\sigma) \quad (4.17)$$

לפי תנאי 2 במשפט 1.1 ,החלק הימני של (4.17) שייך ל-$L_1(R)\bigcap C(R)$. כיוון שהחלק הימני והשמאלי של (4.17) מתלכדים, אזי נקבל את הדרישה

$$\boxed{u(x,t)\in L_1(R)\bigcap C(R)\quad \forall t>0} \quad (4.18)$$

7.הפיכת התמרת פורייה

מהמסקנה 3.2 מההרצאה הרביעית נקבל:

אם $f_1\in L_1(R)\bigcap C(R)\ ,\ f_2\in L_1(R)\bigcap C(R)$ ו- $f_1(\sigma)\equiv f_2(\sigma)$

$$\Leftarrow \quad f_1(x)\equiv f_2(x)\ ,\ x\in R$$

מהעובדה הנ"ל,ישירות מתקבל (בעקבות (4.17)) כי מתקיים השוויון (עם אינטגרל רגיל):

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(x-\xi)d\xi\equiv\\ &\equiv\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi\ ,\ t>0\end{aligned}\right\} \quad (4.19)$$

(השתמשנו בשוויון $f*g\equiv g*f$).

כעת צריך לבדוק שהפתרון שמצאנו מקיים את כל הדרישות, והינו פתרון של המשוואה המקורית.

8.בדיקה. צריך לבדוק כי:

1. $|u(x,t)| \le g(x) \in L_1(R) \quad \forall t>0; \quad u(x,t) \in C(R), \forall t>0$
2. $u_t' \in L_1(R), \forall t>0$
3. $u_x' \in L_1(R), \forall t>0$
4. $u_t' = u_{x^2}'', \forall t>0$
5. $\lim_{t\to+0} u(x,t) = \varphi(x)$
6. כבר דרשנו:

$$\boxed{\varphi(x) \in L_1(R) \bigcap C(R)}$$

כעת נבדוק הכול לפי הסדר.

$$\underline{|u(x,t)| \le g(x) \in L_1(R) \quad \forall t>0; \quad u(x,t) \in C(R), \forall t>0 \quad .1}$$

אם כך:

$$|u(x,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \varphi(x-\xi) d\xi \right| \le |t \ge t_0 > 0| \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t_0}} |\varphi(x-\xi)| d\xi := g(x)$$

נבדוק כי $g(x) \in L_1(R) \bigcap C(R)$. אם כך,

$$\left|u(x,t)\right| \le \frac{\|\varphi\|_{C(R)}}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t_0}} d\xi = \left|\xi = 2\sqrt{t_0} \cdot s\right| =$$

$$= \frac{\|\varphi\|_{C(R)}}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \cdot 2\sqrt{t_0} ds = \frac{\|\varphi\|_{C(R)}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} = \|\varphi\|_{C(R)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|u(x,t)\right| \le \|\varphi\|_{C(R)} \ , \ \forall x \in R \ , \ t > 0 \quad (4.19)$$

רציפות $u(x,t)$ לפי x נקבע בהמשך בבדיקת ההכלה $u_x' \in L_1(R)$. נחשב כעת $\|u\|_{L_1(R)}$ עבור $\forall t > 0$. פתרון השאלה הנ"ל נהיה יותר קל בעזרת המשפט הבא.

משפט (פוביני 1879-1943):

נקבע פונקציה רציפה של שני משתנים במלבן הבא:

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

כאשר $-\infty \le c < d \le \infty \ , \ -\infty \le a < b \le \infty$.

אם $\int_a^b (\int_c^d |f(x,y)| dx) dy < \infty$ או $\int_c^d (\int_a^b |f(x,y)| dx) dy < \infty$

אזי מתקיים השוויון:

$$\int_a^b (\int_c^d |f(x,y)| dx) dy = \int_c^d (\int_a^b |f(x,y)| dx) dy \quad (4.20)$$

כעת נעריך את $\|u(x,t)\|_{L_1(R)}$ עבור $t > 0$:

$$\|u(x,t)\|_{L_1(R)} \le \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t_0}} |\varphi(x-\xi)| d\xi] dx =$$

$$= |Fubini| = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t_0}} [\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x-\xi)| dx] d\xi = |x-\xi := s|$$

$$= \|\varphi\|_{L_1(R)} \quad \Rightarrow$$

$$\|u(x,t)\|_{L_1(R)} \le \|\varphi\|_{L_1(R)} \ , \ \forall t > 0 \quad (4.20)$$

לכן,1 מתקיים, אם $\varphi \in L_1(R) \bigcap C(R)$,ז"א

$$\boxed{\varphi \in L_1(R) \bigcap C(R) \ \ \Rightarrow \ 1}$$

<u>$u_t' \in L_1(R), \forall t > 0$ .2</u>

קודם כול נביא את $u(x,t)$ לצורה נוחה ללקיחת דיפרנציאל:

$$|u(x,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \varphi(x-\xi) d\xi = |\xi := 2\sqrt{t} \cdot s| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \varphi(x - 2\sqrt{t} \cdot s) 2\sqrt{t} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \varphi(x - 2\sqrt{t} \cdot s) ds$$

יהיה $t \ge t_0 > 0 \ \ \Leftarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\varphi(x-2\sqrt{t}\cdot s)ds\stackrel{?}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\varphi'(x-2\sqrt{t}\cdot s)\cdot\frac{(-s)}{\sqrt{t}}ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\varphi'(x-2\sqrt{t}\cdot s)ds$$

נשאיר לקורא את הבדיקה הסטנדרטית, שהשימוש בכלל לייבניץ כאן אפשרי,אם

$$\boxed{\left|\varphi'(x)\right|\in C(R)} \quad (4.21)$$

אם כך,

$$\left\|u_t'\right\|_{L_1(R)}\le\frac{1}{\sqrt{\pi t_0}}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\cdot s\left|\varphi'(x-2\sqrt{t}\cdot s)\right|ds]dx=$$

$$=\left|Fubini\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi t_0}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\left|s\right|[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi'(x-2\sqrt{t}\cdot s)\right|dx]ds=$$

$$=\left|x=2\sqrt{t}\cdot s+\xi\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi t_0}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\left|s\right|(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi'(\xi)\right|d\xi)ds=$$

$$=\frac{\left\|\varphi'\right\|_{L_1(R)}}{\sqrt{\pi t_0}}\cdot 2\int_0^{\infty}e^{-s^2}sds=\frac{\left\|\varphi'\right\|_{L_1(R)}}{\sqrt{\pi t_0}}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi'(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L_1(R)\ \forall t>0\ \Rightarrow\ 2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ x\in R\ ,\ t>0 \quad .4$$

באותה הצורה, כמו לעיל ,נקבע

א'. $\varphi''(x)\in L_1(R)\bigcap C(R) \ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\in L_1(R)\ \forall t>0$

ב'. עבור חישוב של " u_{x^2} ניתן להשתמש בכלל לייבניץ.

כעת נשתמש בהצגה אחרת של $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi\ ,\ x\in R\ ,\ t\ge t_0>0$$

כיוון שניתן להשתמש בכלל לייבניץ,אזי

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\varphi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}]\varphi(\xi)d\xi$$

נבדוק כי

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial V}{\partial t}(x,\xi,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,\xi,t)\ ,\ x\in R\ ,\ t>0\\ V(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\ ,\ x,\xi\in R\ ,\ t>0\end{array}\right\}\quad (4.22)$$

אם כך,

$$V_t{}' = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot \frac{(x-\xi)^2}{4t^2} =$$

$$=[\exp(\frac{(x-\xi)^2}{4t})]\cdot[\frac{(x-\xi)^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}}]$$

בהמשך,

$$V_x{}' = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot (-\frac{(x-\xi)^2}{4t})_x{}' = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} (-2)\frac{(x-\xi)}{4t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} (x-\xi) \quad \Rightarrow$$

$$V_{x^2}{}'' = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - \frac{(x-\xi)}{2t^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot \frac{(-2)(x-1)}{4t} =$$

$$= \left[\frac{(x-\xi)^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

אם כך,

$$\boxed{\varphi''(x) \in L_1(R)\bigcap C(R) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_1(R)\bigcap C(R) \quad \forall t > 0}$$

5. נשאר לבדוק את התנאי ההתחלתי

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=\varphi(x)\ ,\ \forall x\in R$$

בנוסחא עבור $u(x,t)$ נעשה החלפת משתנה:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(x-\xi)d\xi=\left|\xi=-2\sqrt{t}\cdot s\right|=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-s^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)(-2\sqrt{t})ds=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)ds$$

אם כך,

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)ds\ ,\ t>0 \quad (4.23)$$

נזכיר ש-

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds\ =1 \quad (4.24)$$

מ-(4.23) ו-(4.24) נובע

$$u(x,t)-\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\varphi(x)ds=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right]e^{-s^2}ds\ ,\ t>0 \qquad (4.26)$$

כיוון ש- $\varphi(\xi)\in C(R)$, אזי

$$\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right|\le\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)\right|+\left|\varphi(x)\right|\le$$
$$\le 2\|\varphi\|_{C(R)}\quad\forall x,s,t$$

יהי $\varepsilon>0$.כיוון שאינטגרל ב-(4.24) מתכנס אזי $\exists N=N(\varepsilon)$ כך ש

$$\frac{2\|\varphi\|_{C(R)}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-s^2}ds\le\frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \ \frac{2\|\varphi\|_{C(R)}}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty}e^{-s^2}ds\le\frac{\varepsilon}{3}$$

לכן,

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{N}\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right|e^{-s^2}ds+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right|e^{-s^2}ds+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{\infty}\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right|e^{-s^2}ds\le$$
$$\le\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}\left|\varphi(x+2\sqrt{t}\cdot s)-\varphi(x)\right|e^{-s^2}ds$$

כיוון ש-$\varphi\in C(R)$,אזי פונקציה $\varphi(\xi)$ רציפה במידה שווה על $[-N,N]$. אזי עבור $\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ כך ש-

$$\left|\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall\xi_1,\xi_2\in[-N,N]\quad\left|\xi_1-\xi_2\right|\le\delta(\varepsilon)$$

נבחר N מספיק גדול, כך ש-$x\in[-N,N]$ (ז"א נגדיל את N במידת הצורך). ניקח

$$\xi_1=x+2s\sqrt{t}\ ,\ \xi_2=x\ \Rightarrow$$
$$\left|\xi_1-\xi_2\right|=2s\sqrt{t}\le N\sqrt{t}\ \Rightarrow$$

אם ניקח t מספיק קטן, כך ש-

$$N\sqrt{t}\le\delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ t\le\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{N}\right)^2$$

אזי $|\xi_1-\xi_2|\le N\sqrt{t}\le\delta(\varepsilon)\quad\Leftarrow$

$\left|\varphi(x+2s\sqrt{t})-\varphi(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$ עבור $2s\in[-N,N]\quad\Leftarrow$

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-s^2}ds\le$$

$$\le\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

לכן, לכל $t\in(0,\eta)$, η-מספיק קטן

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\varepsilon\quad\forall t\in(0,\eta)\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=\varphi(x)$$

<u>התוצאות:</u>

אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)$$

אזי בקבוצת הפונקציות $u(x,t)$:

$$\left.\begin{array}{l}\left|u(x,t)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|+\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right|\in L_1(R)\bigcap C(R)\\ \forall t>0\end{array}\right\}$$

בעיית קושי:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ x \in R \ , \ t > 0 \\ \lim\limits_{t \to +0} u(x,t) = \varphi(x) \ , \ x \in R \end{array}\right\}$$

בעלת פתרון שהינו בנוסף יחיד,ומתקיימת הנוסחא:

$$.u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi \ , \ x \in R \ , \ t > 0$$