אינפי 4 - הרצאה 4

10 באוגוסט 2011

שקילות מסילות

נניח כי $\begin{array}{l}\alpha:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n\\ \beta:\ [c,d]\to\mathbb{R}^n\end{array}$ מגבו"ת בעלות אותן נקודות התחלה וסיום:

$$\begin{aligned}\alpha(a) &= \beta(c)\\ \alpha(b) &= \beta(d)\end{aligned}$$

מהו התנאי כדי שאורכן יהיה שווה?

הגדרה - מסילות שקולות

שתי מסילות α,β כנ"ל נקראות שקולות אם יש פונקציה $h:\ [a,b]\to[c,d]$ גזירה ברציפות כך שh על ו$h'(t)>0$, ומתקיים $\alpha=\beta\circ h$.
היחס שהוגדר הוא יחס שקילות. ניתן לראות גם שα חלקה $\iff$ β חלקה.

משפט

$\begin{array}{l}\alpha:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n\\ \beta:\ [c,d]\to\mathbb{R}^n\end{array}$ מגבו"ת שקולות ו$f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי:

$$\int_a^b f(\alpha(t))\cdot\left\|\alpha'(t)\right\|dt=\int_c^d f(\beta(t))\cdot\left\|\beta'(t)\right\|dt$$

הוכחה

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\alpha(t))\left\|\alpha'(t)\right\|dt &= \int_a^b f(\beta(h(t)))\cdot\left\|b'(h(t))\cdot h'(t)\right\|dt\\ &= \int_a^b f(\beta(h(t)))\cdot\left\|\beta'(h(t))\right\|\cdot h'(t)\,dt\\ u &= h(t)\\ du &= h'(t)\,dt\\ \int_a^b f(\alpha(t))\left\|\alpha'(t)\right\|dt &= \int_c^d f(\beta(u))\left\|\beta'(u)\right\|du\end{aligned}$$

פרמטריזציית אורך - משפט

לכל מסילה חלקה $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^n$ יש מסילה שקולה $\hat{\gamma}$ המקיימת לכל t:

$$\left\|\hat{\gamma}^{'}\left(t\right)\right\|=1$$

(ל$\hat{\gamma}$ קוראים מסילה בעלת מהירות יחידה).

הוכחה

נסמן:

$$L=\int_{\gamma}\left\|\gamma^{'}\left(t\right)\right\|dt$$

נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned}\sigma:\ [a,\,b] & \to & [0,\,L]\\ \sigma\left(t\right) & = & \int_{a}^{t}\left\|\gamma^{'}\left(t\right)\right\|dt\end{aligned}$$

אזי $\sigma\left(t\right)$ היא האורך של המסילה המצומצמת $\gamma_{a}^{t}:\ [a,\,t]\to\mathbb{R}^n$.
$\sigma\left(t\right)$ גזירה ברציפות לפי המשפט היסודי של חדו"א ומתקיים:

$$\sigma^{'}\left(t\right)=\left\|\gamma^{'}\left(t\right)\right\|>0$$

לכן קיימת פונק' הפוכה $\tau:\ [0,\,L]\to[a,\,b]$ המקיימת:

$$\tau^{'}\left(s\right)=\frac{1}{\sigma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)}>0$$

נגדיר

$$\hat{\gamma}=\gamma\circ\tau$$

אזי מתקיים:

$$\hat{\gamma}^{'}\left(s\right)=\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\cdot\tau^{'}\left(s\right)=\frac{\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)}{\sigma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)}$$

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\gamma}^{'}\left(s\right)\right\| & = & \left\|\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\cdot\tau^{'}\left(s\right)\right\|\\ & = & \left\|\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\right\|\cdot\frac{1}{\left\|\sigma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\right\|}\\ & = & \left\|\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\right\|\cdot\frac{1}{\left\|\gamma^{'}\left(\tau\left(s\right)\right)\right\|}=1\end{aligned}$$

כעת נקרה כי האורך של $\hat{\gamma}$ המצומצם ל$[0,\,s]$ הוא s:
בגלל השקילות מתקיים:

$$L\left(\hat{\gamma}_{0}^{s}\right)=L\left(\gamma_{0}^{\tau\left(s\right)}\right)=\sigma\left(\tau\left(s\right)\right)=s$$

דוגמה מההרצאה הקודמת שהייתה צריכה להגיע כאן - חישוב אורך קשת מעגל

נתבונן בפרמטריזציה של מעגל קנוני (מרכזו בראשית) שרדיוסו r:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (r\cos t,\, r\sin t)\\ 0\leq\ & t\ \leq 2\pi\end{aligned}$$

אנו רוצים לעבור לפרמטריזציה לפי אורך הקשת:
כידוע, אורך הקשת של מעגל עם רדיוס r, מזווית 0 עד זווית t היא $L(t)=r\cdot t$.
לכן נוכל להגדיר:

$$\sigma(t)=rt$$

מצד שני, הפונק' ההופכית של σ היא:

$$\tau(t)=\frac{t}{r}$$

לכן, הפרמטריזציה של המעגל לפי אורך תהיה:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(t) &= (\gamma\circ\tau)(t)\\ &= \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right),\, r\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

נחשב את אורך המסילה $\hat{\gamma}$ מזווית 0 עד זווית s כלשהי, לפי נוסחה שתוכח באופן כללי בהמשך:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_0^s &= \int_0^s \left\|\hat{\gamma}'(t)\right\| dt\\ &= \int_0^s \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{r}\right)+\cos^2\left(\frac{t}{r}\right)}dt\\ &= \int_0^s dt = s\end{aligned}$$

האינטגרל המסילתי - הגדרה

נתונה מסילה $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n$. תהי f פונק' ממשית המוגדרת על קו γ (תמונת γ).
נבחר רכיב j כלשהו של המסילה ונסמן אותו בγ_j. תהי $p=\left(t^0,\,...,\,t^k\right)$ חלוקה של $[a,b]$.
לכל $i=1,\,...,\,k$ נבחר נק' $\tau^i\in\left[t^{i-1},\,t^i\right]$ וניצור את סכום רימן המתאים לחלוקה p:

$$\sigma_j(p)=\sum_{i=1}^{k} f\left(\gamma\left(\tau^i\right)\right)\cdot\left(\gamma_j\left(t^i\right)-\gamma_j\left(t^{i-1}\right)\right)$$

נאמר כי f אינטגרבילית לאורך γ ביחס לרכיב הj אם קיים הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda(p)\to 0}\sigma_j(p) &= I\\ \lambda(p) &= \max_{i=1}^{k}\left\{\left|t^{i-1}-t^i\right|\right\}\end{aligned}$$

כלומר אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה p עם $\lambda(p) < \delta$ מתקיים $|\sigma_j(p) - I| < \epsilon$.
I נקרא האינטגרל המסילתי של f לאורך γ ביחס לרכיב הj ומסמנים:

$$I = \int_\gamma f(x)\,dx_j$$

הגדרה (אינטגרל מסילתי מסוג ראשון של f ממשית לאורך מסילה γ)

תהי $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך ב$\mathbb{R}^n$, ו$\Gamma = \gamma[a, b]$ הקו המתאים לה.
תהי f פונק' ממשית המוגדרת על Γ.
לכל חלוקה $p = \left(t^0, ..., t^k\right)$ נתבונן בסכום:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{k} f\left(\gamma\left(\tau^i\right)\right)\Delta s^i$$

כאשר

$$\begin{aligned} \tau^i &\in \left[t^{i-1}, t^i\right] \\ \Delta s^i &= L\left(\gamma_{t^{i-1}}^{t^i}\right) \end{aligned}$$

אם קיים הגבול

$$\lim_{\lambda(p)\to 0} \sigma_p = I$$

אז I הוא האינט' המסילתי של f לאורך γ ביחס לאורך המסילה ומסומן:

$$I = \int_\gamma f(x)\,ds$$

משפט (תנאי לאינטגרביליות ודרך חישוב האינטגרל)

1. אם γ מסילה בעלת אורך ב$\mathbb{R}^n$ וf פונק' ממשית המוגדרת בתמונת γ ורציפה שם אז f אינט' לאורך γ ביחס לאורך המסילה.
2. בתנאים של 1, אם $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה חלקה לחלקים (ניתן לחלק את $[a, b]$ לחלקים כך שבכל חלק γ חלקה) אזי

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

(כאשר ds = אינטגרל לאורך מסילה, זה חישוב אינט' של פונק' ממשית f לאורך מסילה γ - אינטגרל מסילתי מסוג ראשון).

הוכחה

נוכיח רק את סעיף 2 (בעצם א' מקרה פרטי) ורק עבור γ מגב"ת.

הערה:

אם γ חלקה לחלקים אפשר לרשום $\gamma=\gamma_1\cup...\cup\gamma_k$ כאשר Γ_k זרים, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{k}$ חלקות ואז לפי אדיטיביות האינטגרל הרגיל בקטע $[a,\,b]$ נקבל שהנוסחה נשמרת. לכן, מספיק להוכיח עבור f מגב"ת.

המשך ההוכחה:

אם γ מגבת אז $f\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert$ רציפה במשתנה $t\in[a,\,b]$. לכן, קיים לה אינט' רימן רגיל ב$[a,\,b]$:

$$I=\int_{a}^{b}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt$$

עלינו להראות שהמספר I הנ"ל הוא בעצם האינטגרל המסילתי של f לאורך γ ביחס לאורך המסילה.
תהי $p=\left(t^{0},\,...,\,t^{k}\right)$ חלוקה של $[a,\,b]$ ו$\tau_{i}\in\left[t^{i-1},\,t^{i}\right]$. נסמן:

$$\begin{aligned}\sigma & = & \sum_{i=1}^{k}f\left(\gamma\left(\tau^{i}\right)\right)\cdot\Delta s^{i}\\ \Delta s^{i} & = & L\left(\gamma_{t^{i-1}}^{t^{i}}\right)\end{aligned}$$

לפי נוסחת האורך:

$$\Delta s^{i}=\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt$$

לכן:

$$\begin{aligned}\sigma & = & \sum_{i=1}^{k}f\left(\gamma\left(\tau^{i}\right)\right)\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt\\ & = & \sum_{i=1}^{k}\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}f\left(\gamma\left(\tau^{i}\right)\right)\cdot\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt\end{aligned}$$

כעת, לפי האדיטיביות של אינטגרל רימן רגיל, מתקיים:

$$I=\sum_{i=1}^{k}\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt$$

נתבונן בהפרש $\sigma-I$:

$$\sigma-I=\sum_{i=1}^{k}\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}\left[f\left(\gamma\left(\tau^{i}\right)\right)-f\left(\gamma\left(t\right)\right)\right]\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt$$

מכיוון ש$f\left(\gamma\left(t\right)\right)$ רציפה ב$[a,\,b]$ היא רציפה שם במ"ש, ולכן לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\left|t^{i}-t^{i-1}\right|<\delta$ אז לכל $t,\,\tau^{i}\in\left[t^{i-1},\,t^{i}\right]$ מתקיים:

$$\left|f\left(\gamma\left(\tau^{i}\right)\right)-f\left(\gamma\left(t\right)\right)\right|<\frac{\epsilon}{M\left(b-a\right)}$$

כאשר

$$M=\sup_{t\in[a,\,b]}\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert$$

כעת, לפי מונוטוניות האינטגרל הרגיל נקבל

$$\begin{aligned}\left|\sigma-I\right| & \leq & \sum_{i=1}^{k}\int_{t^{i-1}}^{t^{i}}\frac{\epsilon}{M\left(b-a\right)}\cdot Mdt\\
 & = & \sum_{i=1}^{k}\int_{t^{i-1}}^{t}\frac{\epsilon}{b-a}dt\\
 & = & \int_{a}^{b}\frac{\epsilon}{b-a}dt=\epsilon
\end{aligned}$$

קיבלנו שσ קרוב כרצוננו לI, ולכן מתקיים:

$$\int_{\gamma}fds=\int_{a}^{b}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt$$

דוגמה (יישום של אינט' מסילתי מסוג ראשון לחישוב מסה)

עלינו לחשב מסה כוללת של קפיץ המתואר ע"י המסילה:

$$\begin{aligned}\gamma & = & \left(\gamma_{1},\,\gamma_{2},\,\gamma_{3}\right)=\left(a\cos t,\,a\sin t,\,bt\right)\\
0\leq & t & \leq2\pi\\
a,\,b & > & 0
\end{aligned}$$

נניח שהצפיפות האורכית של מסת הקפיץ נתונה ע"י הפונקציה:

$$f\left(x,\,y,\,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}$$

המסה הכוללת m של הקפיץ נתונה על ידי:

$$\begin{aligned}m & = & \int_{\gamma}fds\\
 & = & \int_{\gamma}x^{2}+y^{2}+z^{2}ds\\
 & = & \int_{0}^{2\pi}\left(a^{2}\cos^{2}t+a^{2}\sin^{2}t+b^{2}t^{2}\right)\cdot\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert dt\\
\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert & = & \sqrt{\left(-a\sin t\right)^{2}+\left(a\cos t\right)^{2}+b^{2}}\\
 & = & \sqrt{a^{2}\left(\sin^{2}t+\cos^{2}t\right)+b^{2}}\\
 & = & \sqrt{a^{2}+b^{2}}\\
m & = & \int_{0}^{2\pi}\left(a^{2}+b^{2}t^{2}\right)\sqrt{a^{2}+b^{2}}dt\\
 & = & \sqrt{a^{2}+b^{2}}\left[a^{2}t+\frac{b^{2}t^{3}}{3}\right]_{0}^{2\pi}\\
 & = & \sqrt{a^{2}+b^{2}}\left(2\pi a^{2}+\frac{8\pi^{3}b^{2}}{3}\right)
\end{aligned}$$

כיצד נצדיק פיזיקלית ומתמטית את חישוב המסה של תיל (קו ללא עובי) כאינטגרל מסילתי לאורך המסילה?

הסבר:

נניח שΓ היא קו ב$\mathbb{R}^3$ שהיא תמונה של מסילה חלקה למקוטעין ובעלת אורך $\gamma : [a,\, b] \to \mathbb{R}^3$.
תחילה נסתכל על Γ כתיל בעל צפיפות מסה קבועה c (כלומר בכל נק' של התיל המסה היא c).
במקרה זה, ברור שהמסה הכוללת של התיל היא $c \cdot L(\gamma)$.
כעת נניח שצפיפות התיל נתונה ע"י פונק' ממשית רציפה $f(x)$ (צפיפות משתנה).
כדי למצוא את מסת התיל ניקח חלוקה כלשהי $p = \left(t^0,\, ...,\, t^k\right)$ של קטע $[a,\, b]$.
נתבונן כעת בחלוקה המתאימה (המושרית ע"י p של Γ:

$$A = \gamma\left(t^0\right),\, ...,\, \gamma\left(t^k\right) = B$$

בכל קטע $\left[t^{i-1},\, t^i\right]$ של החלוקה נבחר נק' $\tau^i \in \left[t^{i-1},\, t^i\right]$ ונסמן:

$$M_i = f\left(\gamma\left(\tau^i\right)\right)$$

אם p חלוקה עדינה מספיק, כלומר בעלת הרבה נק' עם מרחקים קטנים מספיק ביניהן, נוכל לראות את הקשת $A^{i-1}A^i$ של הקו Γ כתיל בעל צפיפות קבועה ששווה ל$\rho(M_i)$.
המסה m_i של קשת כזו היא:

$$\begin{aligned} m_i &= \rho(M_i) \cdot \Delta s^i \\ \Delta s^i &= L\left(\gamma_{t^{i-1}}^{t^i}\right) \end{aligned}$$

מסת התיל הכוללת היא

$$m_p \approx \sum_{i=1}^{k} \rho(M_i)\, \Delta s^i$$

אם ניקח גבול:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\lambda(p) \to 0} m_p \\ &= \int_\gamma f(x)\, ds \end{aligned}$$

הערה:

אם בהגדרת האינטגרל המסילתי מסוג 1 (לאורך מסילה) ניקח $f \equiv 1$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$ נקבל:

$$\int_\gamma 1 ds = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| = L(\gamma)$$

דוגמה

חשב את אורך העקום:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

נבצע פרמטריזציה של העקום. נשים לב כי העקום מזכיר מאוד משוואת מעגל קנוני ברדיוס 1 (אבל יש שורש שלישי בכל קואורדינטה) כלן נציב:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(\cos^3 t,\, \sin^3 t\right) \\ t &\int [0,\, 2\pi] \end{aligned}$$

(ואכן המשוואה מתקיימת).

נחשב את $\left\|\gamma'(t)\right\|$:

$$\begin{aligned} \left\|\gamma'(t)\right\| &= \sqrt{\left(-3\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2} \\ &= 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} \\ &= 3\left|\sin t \cos t\right| = \frac{3}{2}\left|\sin 2t\right| \end{aligned}$$

נשים לב שהקו שלנו סימטרי ביחס לצירים $x,\, y$ לכן מספיק לחשב אורך העקום ברביע אחד.

נקבל:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \left\|\gamma'(t)\right\| \\ &= 4 \cdot \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt \\ &= 6 \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \end{aligned}$$

תכונות אינטגרל מסילתי לאורך המסילה

נציין ללא הוכחה כמה תכונות של אינטגרל מסילתי לאורך המסילה:

1. יהיו $\gamma^1,\, \gamma^2$ שקולות או אנטי שקולות, מסילות בעלות אורך ב-$\mathbb{R}^n$ ויהיו $\Gamma^1,\, \Gamma^2$ הקוים הנקבעים על ידן.
   תהי f ממשית ורציפה על $\Gamma^1,\, \Gamma^2$, אז:
$$\int_{\gamma^1} f(x)\, ds = \int_{\gamma^2} f(x)\, ds$$

2. האינטגרל המסילתי לאורך המסילה לפי ds הוא העתקה לינארית על הפונק' הממשיות הרציפות.

3. אם $\gamma^1,\, \gamma^2$ שתי מסילות בעלות אורך ב-$\mathbb{R}^n$ כך שהמסילה $\gamma = \gamma^1 + \gamma^2$ מוגדרת (ובעלת אורך).
   אם f ממשית ורציפה על $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ אז:
$$\int_{\gamma} f(x)\, ds = \int_{\gamma_1} f(x)\, ds + \int_{\gamma_2} f(x)\, ds$$

אינטגרל מסילתי מסוג 2 (עבודה של כוח \ שדה וקטורי)

נחזור לאינטגרל מסילתי של f לאורך γ ביחס לרכיב γ_j.
תהי $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה ותהי $\bar{f}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ פונקציה וקטורית המוגדרת על Γ,

$$\begin{aligned}\bar{f} &= (f_1,\,..,\,f_n)\\ f_i &: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\end{aligned}$$

1. $\bar{f}$ אינטגרבילית לאורך γ אם לכל $1\le j\le n$, f_j אינטגרבילית לאורך γ ביחס לרכיב γ_j.
2. הסכום

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma}f_j dx_j$$

נקרא האינטגרל המסילתי של $\bar{f}$ לאורך γ ומסמנים:

$$\int_{\gamma}\overline{f dx}$$

אינטגרל זה נקרא אינטגרל מסילתי מסוג 2 של $\bar{f}$ לאורך מסילה γ.

הערה

אם נסתכל על $\overline{dx}$ כעל וקטור ב$\mathbb{R}^n$ ונרשום:

$$\overline{dx}=(dx_1,\,...,\,dx_n)$$

נוכל לראות את הביטוי $\overline{f}\cdot\overline{dx}$ כמכפלה סקלרית:

$$\bar{f}\cdot\overline{dx}=\sum_{i=1}^{n}f_i dx_i$$

זה סימן היכר של אינטגרל מסילתי מסוג 2.