תרגיל 2

להגשה בשבוע המתחיל ב 20.3.2016

1. תרגיל חימום, איך מחשבים דטרנמיננטה בשילוב אינדוקציה/רקורסיה: תהא

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

כלומר, המטריצה A_n היא מטריצה ממשית מגודל $n \times n$ המוגדרת ע"י: על האלכסון הראשי יש 2 ועל האלכסונים המשניים שמעל ומתחת לאלכסון הראשי יש 1. כל שאר הכניסות שוות 0. למשל

$$A_1 = (2)\,, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ומכאן ישירות ש $|A_1| = 2,\ |A_2| = 3,\ |A_3| = 4,\ |A_4| = 5,\ |A_5| = 6$. מזהים חוקיות? בוא נוכיח:

(א) פתחו את הדטר' של A_n (עבור $n > 2$) לפי שורה ראשונה וקבל את הנוסחא הרקורסיבית (השלימו את החסר)

$$|A_n| = 2\,|A_{n-1}| - 1 \cdot \underline{\qquad\quad}$$

(זיכרו שניתן לפתח גם לפי עמודות)

פתרון: פיתוח לפי שורה ראשונה יתכן

$$|A_n| = 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| - 1\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2|A_{n-1}| - 1|A_{n-2}|$$

כאשר משתמשים בפיתוח לפי עמודה ראשונה במטריצה הימנית.

(ב) הוכיחו בעזרת אינדוקציה (או כל דרך אחרת) כי

$$|A_n| = n + 1$$

פתרון: עבור $n=1,2$ מתקיים. כפי שמופיע בתרגיל. כעת נניח שטענה נכונה עד n מסוים ונוכיח עבור n. לפי הסעיף הקודם והנחת האינדוקציה

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}| = 2n - (n-1) = n+1$$

והנחת האינדוקציה נשמרת.

2. ועכשיו אתם! יהא n טבעי ויהיו $a_0, a_1 \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \dots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \dots a_{n-1})| = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3,2,4)| = (4-2)(4-3)(2-3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

- $C_n - a_0 C_{n-1} \to C_n$
- $C_{n-1} - a_0 C_{n-2} \to C_{n-1}$
- עד $C_2 - a_0 C_1 \to C_2$
- השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)
פתרון: אחרי ביצוע פעולות עמודה אלו נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 - a_0 & a_0^2 - a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} - a_0 & a_{n-1}^2 - a_0 a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_0 a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_0) \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} - a_0 & a_{n-1}(a_{n-1} - a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_0) \end{pmatrix}$$

והדטר' של שתי המטריצות שוות. נפתח לפי שורה ראשונה ונקבל כי הדטר' שווה ל

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ \vdots & & & \\ a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix}\right|$$

נוציא גורם משותף (a_1-a_0) מהשורה הראשונה , גורם משותף (a_2-a_0) מהשורה השניה וכו' עד שנוציא גורם משותף $(a_{n-1}-a_0)$מהשורה האחרונה. נמשיך ונקבל

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\left|\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}\right| = \prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\left|V(a_1,\ldots a_{n-1})\right|$$

לפי הנחת האינדוקציה נמשיך לקבל

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\cdot\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i) = \prod_{0\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)$$

כנדרש

(ב) הסיקו כי עבור $a_0,a_1\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ מספרים שונים, המטריצה $V(a_0,\ldots a_{n-1})$ הפיכה. זיכרו תרגיל זה עד הקורס באלגוריתמים 1 (:

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה עם רכיבים שלמים. כלומר לכל i,j מתקיים כי $A_{i,j}\in\mathbb{Z}$. נתון כי $|A|=7$

(א) יהא $b\in\mathbb{R}^n$ וקטור עם רכיבים שלמים ונסתכל על המערכת המשוואות

$$Ax=b$$

(שימו לב שקיים פתרון יחיד למערכת זאת כי A הפיכה). נסמן $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $x_1\neq\frac{2}{3}$

פתרון: לפי כלל קרמר מתקיים כי

$$x_1=\frac{|A_1|}{7}$$

כאשר A_1 היא מטריצה שזהה למטריצה A פרט לעמודה הראשונה ששווה ל b. נניח בשלילה כי $x_1=\frac{2}{3}$ אזי

$$\frac{|A_1|}{7}=\frac{2}{3}$$

שגורר כי \

$$|A_1|=\frac{14}{3}\notin\mathbb{Z}$$

אבל מנתוני השאלה כל רכיבי A_1הם שלמים ולכן גם הדטר' שלה (כי דטר' זה רק סכום וכפל של רכיבי A_1). סתירה.

(ב) נגדיר $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ משאלה 1. זוהי דוגמא למטריצה מהסעיף הקודם. כלומר $|A_6| = 7$. עוד נגדיר $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נסתכל על המערכת המשוואות

$$Ax = b$$

נסמן $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$. חשב את x_1

פתרון: לפי כלל קרמר מתקיים כי

$$x_1 = \frac{|A_1|}{7}$$

כאשר A_1 היא מטריצה שזהה למטריצה A פרט לעמודה הראשונה. נחשב

$$|A_1| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = |A_5| = 6$$

כאשר המעבר האמצעי הוא לפי פיתוח לפי העמודה הראשונה ולכן

$$x_1 = \frac{6}{7}$$

4. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו כי מתקיים

$$adj(A)^t = adj(A^t)$$

פתרון: שני המטריצות משני האגפים מאותו גודל ושייכות ל $\mathbb{F}^{n\times n}$. נותר להוכיח כי הם שוות בכל כניסה. אכן לכל i, j מתקיים כי

$$\left[adj(A)^t\right]_{i,j} = adj(A)_{j,i} = (-1)^{j+i} M_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} M_{j,i}(A^t) = \left[adj(A^t)\right]_{i,j}$$

כאשר המעבר באמצע ש $M_{i,j}(A) = M_{j,i}(A^t)$ פירושו שהמינור ה i, j של A שווה למינור ה j, i של A^t (שהרי מחיקת שורה i ועמודה j ב A שקול למחיקת שורה j ועמודה i ב A^t)

בהצלחה!