

שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)

סמסטר ב; מועד ב. תשע"א

שם המרצה: ד"ר שחר נבו.

משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ שעות.

ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. חשב $\cos 1$ לפי 2 איברים ראשונים שונים מאפס בפיתוח טיילור סביב $x=0$ של $\cos x$. הערך השגיאה לפי שארית לגרנד' באופן מיטבי. (שים לב כי $\cos x$ היא פונקציה זוגית).
ב. השטח בין גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ לציר x מסתובב סביב ציר y . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

2. א. הבע אורך הגרף של $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$ כאינטגרל מסויים של פונקצייה רצינולית.

ב. חשב האינטגרל הלא מסויים $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$.

3. א. חשב $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$ וציין תחום ההתכנסות.

ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$?

4. א. מצא פתרון למד"ר $0 = (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$ המקיים $y(1) = 2$.

ב. המרה מד"ר מסדר 3 $y^{(3)} = x^2y'' - y'\sin x + e^x y + 5$ במערכת שקולה של 3 מד"ר מסדר 1.

5. מצא כל הפתרונות הממשיים $\vec{y} \left(\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$ של המערכת $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$. מצא גם פתרון המקיים

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. א. מצא פתרון של המד"ר מסדר שני $y'' - 5y' + 6y = 0$ המקיים $y'(0) = 2, y(0) = 2$.

ב. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$.

בהצלחה!

פתרון

שאלה 1

א.

נחשב תחילה את $f(0), f'(0), f''(0)$.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$$

פולינום טיילור הוא $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ $\Leftarrow p(1) = \frac{1}{2}$

נחשב את השגיאה
 $f^{(3)}(x) = \sin x$
 $f^{(4)}(x) = \cos x$

לפי שאית לגרנד' יש לחשב את הערך המקסימאלי של $\left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right|$ כאשר $0 \leq c \leq 1$ ו- $x = 1$

$$\frac{1}{24} \cdot \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{\cos c}{24} \right| \leq \frac{1}{24}$$

ב.

נחשב את נפח הגוף שנוצר עבור $0 \leq x \leq \pi$ ואת נפח הגוף שנוצר עבור $\pi \leq x \leq 2\pi$ ונחבר את התוצאות.

נפח הגוף שנוצר עבור $0 \leq x \leq \pi$ הוא $2\pi \int_0^\pi x \sin x dx$

נציב $dx = -dt \Leftarrow x = \pi - t$ ונקבל

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \int_\pi^0 -(\pi - t) \sin(\pi - t) dt = \int_\pi^0 -(\pi - t) \sin t dt = \int_0^\pi (\pi - t) \sin t dt$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi \pi \sin t dt - \int_0^\pi t \sin t dt \Rightarrow 2 \int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi \pi \sin t dt$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \pi \sin t dt = \frac{1}{2} [-\pi \cos t]_0^\pi = \pi$$

סה"כ הנפח המתקבל הוא $2\pi^2$.

נפח הגוף שנוצר עבור $\pi \leq x \leq 2\pi$ הוא $2\pi \int_\pi^{2\pi} x \sin x dx$

נציב $dx = -dt \Leftarrow x = 3\pi - t$ ונקבל

$$\int_\pi^{2\pi} x \sin x dx = \int_{2\pi}^\pi -(3\pi - t) \sin(3\pi - t) dt = \int_{2\pi}^\pi -(3\pi - t) \sin t dt = \int_\pi^{2\pi} (3\pi - t) \sin t dt$$

$$\int_\pi^{2\pi} x \sin x dx = \int_\pi^{2\pi} 3\pi \sin t dt - \int_\pi^{2\pi} t \sin t dt \Rightarrow 2 \int_\pi^{2\pi} x \sin x dx = \int_\pi^{2\pi} 3\pi \sin t dt$$

$$\int_\pi^{2\pi} x \sin x dx = \frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi} 3\pi \sin t dt = \frac{1}{2} [-3\pi \cos t]_\pi^{2\pi} = -3\pi$$

סה"כ הנפח המתקבל הוא $6\pi^2$.

הנפח הכולל הוא $8\pi^2$.

שאלה 2

$$dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftarrow t = \sqrt{x^2+1} \text{ נציב } \int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$
$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{x^2+1}{x^2} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{t^2}{t^2-1} dt$$

$$v = 2(x-1)^{0.5} \quad u = 2x$$
$$v' = (x-1)^{-0.5} \quad u' = 2$$

ב. נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \int 4(x-1)^{\frac{1}{2}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$$

שאלה 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nx^{n+2}} = x \text{ ובנוסף } \sum_{n=1}^{\infty} n \text{ מתבדר ו } \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \text{ מתבדר ולכן תחום ההתכנסות הוא } -1 < x < 1.$$

$$x^3 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} \Leftarrow f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Leftarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\frac{x^3}{(1-x)^2} \text{ הסכום המבוקש הוא } f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Leftarrow f(x) = \frac{x}{1-x} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 1 \text{ בנוסף מתקיים } \frac{1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} \text{ נשתמש במבחן השוואה השני}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \text{ מתכנס ולכן גם } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

שאלה 4

$$y(1) = 2 \text{ המקיים } 0 = (2x + 3x^2 y) dx + (x^3 - 3y^2) dy \text{ מצא פתרון למד"ר}$$

פתרון

$$u(x, y) = x^2 + x^3 y + c(y) \Leftarrow u(x, y) = \int (2x + 3x^2 y) dx + c(y)$$

$$c(y) = -y^3 \Leftarrow -3y^2 = c'(y) \Leftarrow x^3 - 3y^2 = x^3 + c'(y) \Leftarrow u'_y = x^3 + c'(y)$$

$$u(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$$

$$c = -5 - 5 = x^2 + x^3 y - y^3 \text{ ולכן } y(1) = 2. c = x^2 + x^3 y - y^3 \text{ הפתרון הוא}$$

שאלה 5

$$\text{מצא כל הפתרונות הממשיים } \vec{y} \left(\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \text{ של המערכת } \begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases} \text{ מצא גם פתרון המקיים}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$\lambda = 1 \pm 2i \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

נמצא את הוקטור העצמי שמתאים לערך העצמי $\lambda = 1 + 2i$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$

$$y_1 = e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \Rightarrow y_1 = e^x \cos 2x + i e^x \sin 2x$$

$$y_2 = (-1 - i)e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \Rightarrow y_2 = e^x(\sin 2x - \cos 2x) + i e^x(-\cos 2x - \sin 2x)$$

הפתרון הוא

$$y_1 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

$$y_2 = c_1 e^x(\sin 2x - \cos 2x) + c_2 e^x(-\cos 2x - \sin 2x)$$

$$c_1 = 1$$

$$-1 - c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -3 \quad \text{ולכן } \overrightarrow{y(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ נתון בנוסף ש}$$

$$y_1 = e^x \cos 2x - 3e^x \sin 2x$$

$$y_2 = e^x(\sin 2x - \cos 2x) - 3e^x(-\cos 2x - \sin 2x) \Rightarrow y_2 = 2e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

שאלה 6

ב. מצא האינטגרל הלא מסוים $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

פתרון

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{2t\sqrt{t}}{6} = \frac{2(x^4 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}{6} \quad . dt = 4x^3 dx \Leftrightarrow t = x^4 + 1 \text{ נציב}$$