תזכורת:
בסוף השיעור הקודם הוכחנו את המשפט הבא:
יהיו $1 \leq \lambda \leq \kappa$ מונים, כך שκ מונה אינסופי, אזי:
$\lambda + \kappa = \lambda\kappa = \kappa$ (סכום ומכפלה של מונים).
במילים אחרות: יהיו λ וκ שני מונים שונים מ0, שלפחות אחד מהם אינסופי, אזי הסכום והמכפלה שווים למקסימום מבנהם.
טענה: אם $\lambda \leq \kappa$ שני מונים, וθ מונה כלשהו, אזי

$$\lambda^\theta \leq \kappa^\theta$$

הוכחה: $\lambda \leq \kappa$ אומר ש$\lambda \subseteq \kappa$. ולכן כל פונקציה מθ לλ היא בעצם פונקציה מθ לκ, אז קיבלנו ש

$${}^\theta\lambda \subseteq {}^\theta\kappa$$

ולכן

$$\lambda^\theta = |{}^\theta\lambda| \leq |{}^\theta\kappa| = \kappa^\theta$$

מסקנה: יהי $1 < \lambda$ מונה, ו$\lambda \leq \kappa$ מונה אינסופי, אזי $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.
הוכחה:

$$2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (2^\lambda)^\kappa = 2^{\lambda\kappa} = 2^\kappa$$

הערה: השתמשנו בחוקי חזקות. צריך להוכיח שהם מתקיימים גם עבור עוצמות.
החוקים הבאים נכונים: יהיו θ, λ, κ עוצמות כלשהן.
1. $(\theta^\lambda)^\kappa = \theta^{\lambda\kappa}$
2. $\theta^\lambda\kappa^\lambda = (\theta\kappa)^\lambda$
3. $\theta^\lambda\theta^\kappa = \theta^{\lambda+\kappa}$

נוכיח את 2:

$$\theta^\lambda\kappa^\lambda = |\theta^\lambda \times \kappa^\lambda| = |{}^\lambda\theta \times {}^\lambda\kappa|$$

$$(\theta\kappa)^\lambda = |{}^\lambda(\theta \times \kappa)|$$

$$F : {}^\lambda\theta \times {}^\lambda\kappa \to {}^\lambda(\theta \times \kappa)$$

$$F(f,g)(\alpha) = (f(\alpha), g(\alpha))$$

ניתן להראות שהפונקציה F היא חח"ע ועל.
טענה: יהי α סודר, אזי $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$
הוכחה: בתרגול.

הגדרה: יהי κ מונה. κ יקרא מונה עוקב אם קיים איזשהו מונה λ כך ש $\kappa = \lambda^+$. אחרת, κ יקרא גבולי.

הגדרה: יהי κ מונה. נסמן ב$card(\kappa)$ את קבוצת כל המונים ששייכים אליו.

טענה: יהי κ מונה גבולי. אזי $\kappa = \sup card(\kappa)$.

הוכחה: ראשית, ברור שκ גדול שווה מכל איברי $card(\kappa)$.

יהי α סודר שקטן ממש מκ. לכן $|\alpha| \leq \alpha$ ולכן $|\alpha| \in card(\kappa)$. מכיוון ש$|\alpha| < \kappa$ אז $|\alpha|^+ \leq \kappa$. מכיוון שκ גבולי הוא לא עוקב, לכן $|\alpha|^+ \neq \kappa$. ומכאן $|\alpha|^+ < \kappa$ ולכן $|\alpha|^+ \in card(\kappa)$. מטענה שציטטנו קודם, $\alpha < |\alpha|^+$. ולכן α אינו גדול שווה מכל איברי הקבוצה. כלומר, κ הוא הסודר הראשון שגדול שווה מכל איברי הקבוצה. ולכן הוא הסופרימום של הקבוצה.

טענה: תהי A קבוצה של מונים. אז $\bigcup A$ הוא מונה.

הוכחה: ראשית, כל מונה הוא סודר, ואנחנו יודעים שאיחוד של קבוצה של סודרים הוא סודר. לכן $\bigcup A = \alpha$ הוא סודר.

אנחנו רוצים להוכיח שהוא מונה.

נסתכל על $|\alpha|$. $|\alpha| \leq \alpha$. אם $|\alpha| = \alpha$ זה אומר שα הוא מונה וסיימנו. אחרת, $|\alpha| < \alpha$.

לכן קיים $\kappa \in A$ כך ש$|\alpha| < \kappa$. A היא קבוצה של מונים ולכן κ מונה.

$\alpha \leq \kappa$ ולכן $\kappa = |\kappa| \leq |\alpha| = \kappa$ סתירה.

הגדרת ה$\aleph$ים

אנחנו עושים הגדרה ברקורסיה.

הגדרה: נגדיר $\aleph_0 = \omega$

יהי α סודר כלשהו. נניח שהגדרנו את $\aleph_\alpha$ והוא איזשהו מונה, אז $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$

יהו α סודר גבולי, ונניח שלכל $\beta < \alpha$ הגדרנו את $\aleph_\beta$ והוא איזשהו מונה, אז $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha}\{\aleph_\beta\}$, והוכחנו שסופרימום של קבוצה של מונים הוא מונה, ולכן $\aleph_\alpha$ הוא מונה.

תרגיל: $\aleph_\alpha$ מונה עוקב אמ"ם α סודר עוקב. ו$\aleph_\alpha$ מונה גבולי אמ"ם α סודר גבולי.

הערה: הגדרנו פונקציה$f : ON \to Card$ ממחלקת הסודרים למחלקת המונים, הפונקציה הזאת נקראת "פונקציית הא" ונחקור את התכונות שלה בהמשך.

קופינליות

הגדרה: תהי A קבוצה סדורה חלקית. הקופינליות של A, $cof(A)$ מוגדרת להיות העוצמה המינימלית של תת קבוצה קופינלית (שולטת/דומיננטית) $D \subseteq A$.

תזכורת: D נקראת קופינלית בA לכל $a \in A$ קיים $d \in D$ כך ש$a = d \vee a < d$.

טענה: לכל קס"ח A, $cof(A)$ היא מונה שקטן שווה מ$|A|$.

משפט: תהי A קס"ח ונניח ש$cof(A) = \kappa$. אזי קיימת פונקציה $f : \kappa \to A$ קופינלית, חח"ע (כלומר, שהתמונה שלה היא תת קבוצה קופינלית) ומקיימת לכל $\alpha, \beta \in \kappa$ שאם $f(\alpha) < f(\beta)$ אז $\alpha < \beta$.

הוכחה: קיימת תת קבוצה $D \subseteq A$ קופינלית מעוצמה κ. קיימת פונקציה חח"ע ועל

$$g : \kappa \to D$$

נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$B = \{\beta \in \kappa : \forall \alpha < \beta \neg (g(\beta) < g(\alpha)\}$$

טענת עזר: $g[B]$ קופינלית.

הוכחת עזר: יהי $a \in A$. קיים $\alpha \in \kappa$ כך ש$a \leq g(\alpha)$.

יהי β הסודר הראשון שמקיים $a \leq g(\beta)$.

$\beta \in B$. אחרת היה $\gamma < \beta$ כך ש$g(\beta) < g(\gamma)$ ובפרט $a < g(\gamma)$. בסתירה לכך שβ הוא הראשון.

$\kappa \leq |B|$. בנוסף, $|g[B]| = |B|$ כי g חח"ע, ולכן מהגדרת קופינליות , $\kappa \leq |B|$. לכן $|B| = \kappa$.

B היא תת קבוצה של κ ולכן יש עליה את הסדר המושרה אז היא קבוצה סדורה היטב עם הסדר המושרה מκ.

$\kappa = |B| \leq otp(B)$.

בנוסף, $otp(B) \leq \kappa$. (טיפוס הסדר של תת קבוצה קטן שווה מטיפוס הסדר של הקבוצה).

לכן יש איזו סדר $h : \kappa \to B$.

נגדיר

$$f : \kappa \to A$$

$$f = g \circ h$$

אז $Im(f) = Im(g)$ כי h על, ולכן התמונה של f קופינלית.

כעת, נניח $f(\beta) < f(\alpha)$. כלומר,

$$g(h(\alpha)) < g(h(\beta))$$

$h(\alpha), h(\beta) \in B$. לפי הגדרת B, לא ייתכן שיש בB סודרים $\delta < \gamma$ כך ש$g(\delta) > g(\gamma)$. לכן $h(\alpha) < h(\beta)$.

h היא איזו סדר, ולכן $\alpha < \beta$.

מסקנה: אם A היא קבוצה סדורה קווית, ו$\kappa = cof(A)$, אז קיימת פונקציה $f : \kappa \to A$ קופינלית ושומרת סדר.

הוכחה: לפי המשפט הקודם קיימת $f : \kappa \to A$ קופינלית חח"ע ושמקיימת: אם $f(\alpha) < f(\beta)$ אז $\alpha < \beta$.

יהיו $\alpha < \beta \in \kappa$. מכיוון ש$A$ סדורה קווית ניתן להשוות בין התמונות שלהם. אם $f(\alpha) = f(\beta)$ נקבל סתירה לחח"ע.

אם $f(\beta) < f(\alpha)$ לפי התכונות של הפונקציה חייב להתקיים $\beta < \alpha$. סתירה להנחה.

לכן $f(\alpha) < f(\beta)$.

טענה: תהי A קבוצה סדורה קווית. אזי $cof(cof(A)) = cof(A)$

הוכחה: $cof(cof(A)) \leq cof(A)$, כי לכל קס"ח A אנחנו יודעים ש $cof(A) \leq |A|$, ובמקרה שלנו, $cof(A)$ זה מונה, ולכן $cof(A) = |cof(A)|$.

מצד שני, תהי $D \subseteq cof(A)$ תת קבוצה שולטת מהעוצמה המינימלית האפשרית, כלומר, מעוצמת הקופינליות של $cof(A)$.

יש פונקציה חח"ע, שולטת ושומרת סדר

$$f : cof(A) \to A$$

אזי $f[D]$ היא תת קובצה קופינלית של A.

הסבר: יהי $a \in A$. אזי קיים $\alpha \in cof(A)$ כך ש$a \le f(\alpha)$. יש $\beta \in D$ כך ש$\alpha \le \beta$ (כי D קופינלית ב$cof(A)$).

מכיוון שf שומרת סדר אז $a \le f(\alpha) \le f(\beta)$.

$cof(A)$ היא העוצמה המינימלית שיש ממנה תת קבוצה קופינלית בA. לכן $cof(A) \le |D|$.

כלומר,

$$cof(A) \le cof(cof(A))$$

הגדרה: מונה κ יקרא סדיר אם $cf(\kappa) = \kappa$. אחרת המונה יקרא חריג.

כלומר, κ חריג אם $cf(\kappa) < \kappa$.

לדוגמא: $\aleph_\omega$ הוא מונה חריג.

הסבר: $\aleph_\omega = \sup_{n<\omega}\{\aleph_n\}$. לכן הקבוצה $\{\aleph_n\}$ היא תת קבוצה קופינלית, כי לכל $\alpha < \aleph_\omega$ קיים איזשהו n כך ש$\alpha < \aleph_n$. וברור ש$|\{\aleph_n\}| = \omega$.

$\aleph_\omega \ge \aleph_1 > \aleph_0 = \omega$.

למה: תהי A קבוצה מעוצמה קטנה שווה מκ (מונה אינסופי כלשהו) של קבוצות מעוצמה קטנה שווה מκ. אזי

$$|\bigcup A| \le \kappa$$

הוכחה: לכל $X_i \in A$ קיימת פונקציה חח"ע $f_i : X_i \to \kappa$. בנוסף קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to \kappa$.

נגדיר

$$g : \bigcup A \to \kappa \times \kappa$$

$$g(x) = (f(X_i), f_i(x))$$

כל x שייך לאיחוד ולכן שייך לאיזשהי קבוצה באיחוד. הקבוצות לא בהכרח זרות ולכן יכול להיות שהוא שייך לכמה קבוצות. נבחר לכל x את הראשונה שאליה הוא שייך- ע"י הסר שמושרה מf.

ניתן להוכיח שg חח"ע.

לכן

$$|\bigcup A| \le |\kappa \times \kappa| = \kappa$$

טענה: יהי κ מונה אינסופי כלשהו, אזי κ^+ הוא מונה סדיר.
הוכחה: נניח בשלילה שהקופינליות של κ^+ קטנה ממש מκ^+. לכן $cof(\kappa^+) \leq \kappa$.
כלומר, קיימת $D \subseteq \kappa^+$ קופינלית מעוצמה קטנה שווה מκ.
D קופינלית זה אומר שלכל $\alpha \in \kappa^+$ קיים $\beta \in D$ כך ש$\alpha \leq \beta$.
נובע מכך ש:

$$\kappa^+ = \bigcup_{\beta \in D} \beta + 1$$

מהנחה, $|D| \leq \kappa$.
ולכן $\beta \in D$, $\beta \in \kappa^+$ ולכן $|\beta + 1| \leq |\beta| + 1 < \kappa^+ + 1 = \kappa^+$
ולכן $|\beta + 1| \leq \kappa$.
אז מהלמה הקודמת נקבל ש

$$|\bigcup_{\beta \in D} \beta + 1| \leq \kappa$$

סתירה.
הערה: לכל קבוצה סדורה קווית, $cof(A)$ היא מונה סדיר. (הוכחנו את זה)
הערה: לכל סודר גבולי α (ובפרט לכל מונה אינסופי), $cof(\alpha) \geq \omega$. (תוכיחו בתרגול)
דוגמא: נסתכל על הקס"ח הבא $\bigcup \{n\} \times \aleph_n$ כאשר כל "טור" אנחנו משווים בתוך עצמו, ואין קשר בין הטורים.
(כלומר, $(a,b) < (c,d)$ אמ"ם $a = c$ ו$b < d$ לפי היחס הרגיל)
נשים לב

$$|\bigcup \{n\} \times \aleph_n| = \aleph_\omega$$

הסבר: מצד אחד, לכל n, $|\{n\} \times \aleph_n| = \aleph_n \leq \aleph_\omega$.
אז יש איחוד של פחות מ$\aleph_\omega$ קבוצות, שהעוצמה של כל אחת קטנה שווה מ$\aleph_\omega$ ולכן זה קטן שווה מ$\aleph_\omega$.
מצד שני, הקבוצה מכילה תת קבוצה מעוצמה $\aleph_n$ לכל n, ולכן העוצמה שלה גדולה שווה מ$\aleph_n$ לכל n, ולכן גדולה שווה מהסופרימום של $\{\aleph_n\}$ שווה ל$\aleph_\omega$.
טענה: הקופינליות של הקס"ח הזה היא $\aleph_\omega$.
הסבר: ברור שהקופינליות קטנה שווה מעוצמת הקבוצה שהיא $\aleph_\omega$.
כל תת קבוצה קופינלית, החיתוך שלה עם כל טור צריך להיות קופינלי בתוך הטור הזה, שאיזומורפי ל$\aleph_n$ שחוץ מ$\aleph_0$ הוא מונה עוקב ולכן סדיר, כלומר הקופינליות שלו היא $\aleph_n$. כלומר, כל תת קבוצה קופינלית מכילה תת קבוצה מעוצמה $\aleph_n$ לכל n, ולכן העוצמה שלה גדולה שווה מ$\aleph_\omega$.
משפט: (בלי הוכחה) יהי A קס"ח עבורו $cof(A)$ היא מונה חריג. אזי קיימת בA אינטי שרשרת אינסופית. (אנטי שרשרת= תת קבוצה שבין כל שני איברים אי אפשר להשוות).
השערה פתוחה: תהי A קס"ח כך $cof(A) = \kappa$ היא מונה חריג. אזי קיימת בA אנטי שרשרת מעוצמת $cof(\kappa)$.

בחזרה לפונקציית ה$\aleph$

תכונות:

1. פונקציית ה$\aleph$ שומרת סדר. כלומר אם $\beta > \alpha$ אז $\aleph_\beta > \aleph_\alpha$.
2. פונקציית ה$\aleph$ היא פונקציה רציפה. כלומר, לכל סודר α גבולי, $f(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$. - אין מה להוכיח. זאת ההגדרה של $\aleph_\alpha$ עבור סודר גבולי.
3. פונקציית ה$\aleph$ היא על מחלקת המונים האינסופיים.

הוכחה:

1. נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית על β. יהי α סודר, נוכיח שלכל $\alpha < \beta$ $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

נניח שהטענה נכונה לכל $\alpha < \gamma < \beta$.

אם אין סודרים כאלה, זה אומר ש$\beta = \alpha + 1$ אז $(\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\beta$. קיבלנו ש$\aleph_\beta > \aleph_\alpha$.

כעת, נניח שיש סודרים כאלו.

נחלק למקרים.

אם β עוקב, אז $\beta = \delta + 1$. מכיוון ש$\alpha < \beta$ אז $\alpha \geq \delta$. $\aleph_\beta = (\aleph_\delta)^+$. מהנחת האינדוקציה

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\delta < \aleph_\beta$$

אם β גבולי, אז $\aleph_\beta = \sup_{\delta<\beta}\{\aleph_\delta\}$. בפרט, $\aleph_\beta \geq \aleph_\delta$ לכל $\delta < \beta$.

לפי ההנחה $\alpha < \beta$. מכיוון שβ סודר גבולי, אז $\alpha + 1 < \beta$. ולכן

$$\aleph_\beta \geq \aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$$