תרגול חזרה

①

שאלה: הוכח/הפרך:

א). אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אזי $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

הוכחה: נשתמש כאי שוויון: $||a_n|-|a|| \le |a_n - a|$

לכן: $||a_n|-|a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$||a_n|-|a|| < \varepsilon$$

לכן: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

ב). אם $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

פתרון הפרכה: $a_n=(-1)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|(-1)^n| = 1$

אבל a_n אינה מתכנסת.

ג). אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $b_n=\frac{1}{a_n}$ מתכנסת במובן הרחב ל $\pm\infty$

פתרון הפרכה: (סתר $a_n=\frac{(-1)^n}{n}\to 0$, אבל $b_n=(-1)^n\cdot n$

לא מתכנסת גם במובן הרחב (כלומר לא מתכנסת למספר ממשי וגם לא ל- $\pm\infty$)

3). אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

פתרון הפרכה: $a_n=\frac{1}{n}\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

תרגיל: גזור את הפונ' הבאות!

א). $f(x)=x^{\cos(e^{x^2})}$

פתרון רישום: $f(x)=x^{\cos(e^{x^2})}=e^{\cos(e^{x^2})\ln x} \Rightarrow$

$$f'(x)=\left(e^{\cos(e^{x^2})\ln x}\right)'=\left(\cos(e^{x^2})\ln x\right)'\cdot e^{\cos(e^{x^2})\ln x}=\left(\cos(e^{x^2})\ln x\right)'\cdot x^{\cos(e^{x^2})}$$

$$\left(\cos(e^{x^2})\ln x\right)' \underset{\Downarrow}{=} \left(\cos(e^{x^2})\right)'\ln x+\left(\cos(e^{x^2})\right)(\ln x)'=2xe^{x^2}\sin(e^{x^2})\cdot\ln x+$$

(נגזרת של מכפלה-
של שתי פונ')

$$+\left(\cos(e^{x^2})\right)\cdot\frac{1}{x}$$

2) ולכן תשובה סופית:

$$f'(x) = \left(2xe^{x^2}\sin(e^{x^2})\ln x + \frac{\cos(e^{x^2})}{x}\right)x^{\cos(e^{x^2})}$$

ב. $$f(x) = \arctan\left(\frac{\log x}{1+x^2}\right)$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\log x}{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\log x}{1+x^2}\right)'.$$

$$\left(\frac{\log x}{1+x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2)-\log x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\log x}{x(1+x^2)^2}$$

(גזרת ~~[illegible]~~ של מנה) [illegible]

תשובה סופית:

$$f'(x) = \left(\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+\log^2 x}\right)\left(\frac{1-x^2-2x^2\log x}{x(1+x^2)^2}\right)$$

ג. $$f(x) = e^{e^{x^x}}$$

פתרון:

$$f'(x) = (e^{x^x})'\cdot e^{e^{x^x}} = (x^x)'(e^{x^x})(e^{e^{x^x}}) =$$

$$= (\ln x+1)\cdot x^x\cdot e^{x^x}\cdot e^{e^{x^x}}$$

ד. $$f(x) = \frac{\arctan(e^{\sin x})}{(\log x)^2}$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+e^{2\sin x}}\cdot(\cos x\cdot e^{\sin x})(\log x)^2 + \arctan(e^{\sin x})\cdot\frac{2\log x}{x}}{(\log x)^2}$$

משפט ערך הביניים ומשפטי - ממוצע

תרגיל: עבור $x>0$ (טבעי) $f(x) = \ln x - x + 2$

הוכיחו כי קיימים לפחות שני ערכים של x שעבורם $f(x)=0$

פתרון: נשתמש במשפט ערך-הביניים: אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגם $f(a)\cdot f(b)<0 \Leftarrow$ קיימת $x_0\in(a,b)$ כך ש-$f(x_0)=0$.

מה שנשאר: למצוא שני קטעים בתוך $(0,\infty)$ שבהם f מקיימת את תנאי-המשפט:

$$x=\frac{1}{100}: \ln\frac{1}{100}-\frac{1}{100}+2 = -\ln 100-\frac{1}{100}+2<0$$

$$x=\frac{1}{2}: \ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2 = -\ln 2-\frac{1}{2}+2>0$$

ולכן בקטע $[\frac{1}{100},\frac{1}{2}]$ יש ל f שורש.

$x=1: \quad \ln 1 - 1 + 2 = 1 > 0$

$x=5: \quad \ln 5 - 5 + 2 \approx -1.39 < 0$

ולכן בקטע $[1,5]$ יש לנו שורש (נוסף).
ולכן הוכחנו של-f יש לפחות שני שורשים.

<u>תרגיל:</u> תהי f גזירה בקטע I ונניח שהישר $y=x$ חותך את-גרף של f מעל שתי נק' של I. הוכיחו שקיים $c\in I$ כך ש $f'(c)=1$.

<u>הוכחה:</u> (נגדיר פונק') $g(x)=f(x)-x$.
לפי הנתון f חותכת את x בשתי נקודות ⇐ קיימות שתי נקודות $a\neq b$ כך ש $g(a)=g(b)=0$, וגם $[a,b]\subset I$.
לפי הנתון f גזירה ב I ⇐ גזירה ב $[a,b]$, וגם x גזירה לכל x בקטע $[a,b]$ ⇐ $g(x)$ גזירה ב $[a,b]$ ⇐ לפי משפט רול קיימת $c\in[a,b]$ כך ש $g'(c)=0$ ⇐ $f'(c)-1=0=g'(c)$
⇐ $f'(c)=1$

<u>תרגיל:</u> תהי f רציפה בקטע $[-1,1]$ ונניח $0<f(x)<1$ לכל $x\in[-1,1]$. הוכיחו כי הפרבולה $y=x^2$ חותכת את הגרף של f לפחות פעמיים בקטע $(-1,1)$.

<u>הוכחה:</u> כמו תמיד, (נגדיר פונק') $g(x)=f(x)-x^2$.
מספיק שנוכיח של-g קיימים לפחות שני שורשים ב $(-1,1)$. (נחלק את הקטע $[-1,1]$ לשני קטעים: $[0,1]$, $[-1,0]$ ונראה שבכל אחד מהקטעים קיים לפחות שורש אחד של g:

$x=0: \quad g(0)=f(0)>0$

$x=1: \quad g(1)=f(1)-1<0$ (כי $f(x)<1$ לכל $x\in[-1,1]$)

ולכן יש לפחות שורש אחד של g בקטע $(0,1)$

$x=0: \quad g(0)>0$ (ראינו כבר)

$x=-1: \quad g(-1)=f(-1)-1<0$ (מאותה סיבה כמו מקודם)

ולכן בקטע $(-1,0)$ יש ל g לפחות שורש אחד.
סה"כ בקטע $(-1,1)$ יש ל g לפחות שני שורשים ⇐
⇐ $f(x)=x^2$ ב $(-1,1)$ לפחות בשתי נקודות.

④ **תרגיל:** הראו שלכל $x>1$

$$\arctan x < \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$$

הוכחה: (סמן) $f(x)=\arctan x$ ונשים לב ש- $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$. (נשתמש במשפט לגרנז':
שאומר שאם f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אזי
קיימת $c\in(a,b)$ כך ש:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ובמקרה שלנו $[1,x]$ כאשר $x>1$: קיימת $c\in(1,x)$ כך ש:

$$\Downarrow$$

$$f'(c) = \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(x)-\arctan(1)}{x-1} = \frac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

נכפיל את שני האגפים ב $x-1$ ונקבל

$$\arctan(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{x-1}{1+c^2}$$

מה שנשאר לנו זה להראות ש $\frac{x-1}{1+c^2}<\frac{x-1}{2}$ לכל $x>1$:

אבל $c\in(1,x) \Leftarrow c>1 \Leftarrow c^2>1 \Leftarrow 1+c^2>2 \Leftarrow$

$$\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{2} \Leftarrow \frac{x-1}{1+c^2}<\frac{x-1}{2} \Leftarrow \arctan(x)-\frac{\pi}{4}<\frac{x-1}{2}$$

נעביר את $\frac{\pi}{4}$ אגף ונקבל את הדרוש.

תרגיל: נתון f מוגדרת וגזירה בסביבת 0, $f(0)=0$, $f'(0)=2$. מצא את הנגזרת של $f(f(f(x)))$ בנקודה $x=0$

הוכחה:

$$(f(f(f(x))))' \underset{\text{לפי כלל השרשרת}}{\overset{\Downarrow}{=}} f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$$

$f'(0)=2$, $f'(f(0))=f'(0)=2$, $f'(f(f(0)))=f'(f(0))=f'(0)=2$

לכן:

$$(f(f(f(x))))' = 2\cdot 2\cdot 2=8$$

(5)

<u>תרגיל:</u> יהיו $0<x_1<x_2$ ותהי f פונק' רציפה בקטע $[x_1,x_2]$ וגזירה בקטע (x_1,x_2). הוכיחו שקיים מספר $c\in(x_1,x_2)$ כך ש:

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(c) - c\cdot f'(c)$$

(רמז: התבוננו ב: $\left(\frac{1}{x}, \frac{f(x)}{x}\right)$)

<u>פתרון:</u> (ע פלר): $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

ברור ש $g(x)$ מקיימת תנאי' משפט לגרנז' בקטע $[x_1,x_2]$ (אם ברור לי, אם לא ברור לבדוק) ולפי ל. קיימת $c\in(x_1,x_2)$ כך ש

$$g'(c) = \frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{c^2} = \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$$

נכפול את שני האגפים ב (-1) ונקבל:

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1\cdot x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{-f'(c)\cdot c + f(c)}{c^2} \quad (*)$$

רוצים לצמצם את c^2: שוויון $(*)$ נכון לכל f רציפה ב $[x_1,x_2]$ וגזירה ב (x_1,x_2) ובפרט זה נכון עבור $f(x)=1$ פונק' קבועה, ולכן נקבל $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}$. (נציב את זה ב $(*)$) ונקבל:

$$\frac{1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1\cdot x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{1}{c^2}$$

ולכן נכפול את שני האגפים ב $(*)$ ב c^2 ונקבל את הדרוש.

<u>תרגיל:</u> חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x}$

<u>פתרון:</u> המונה והמכנה שואפים לאפס $\Leftarrow$ נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} 1+x^2 = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x}$$

ב. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}\cdot x^2} = 0$ מכיוון שמכנה שואף ל ∞.

ג. $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$$

גם המונה וגם המכנה שואפים ל 0 כאשר $x \to 0$ ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} -\frac{2\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{\cos^2 2x}}{1} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = -2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$$