

הגדרה

שדה F הוא עושלס (Perfect) אם כל הרחבה סופית (כלומר ממימד סופי) היא ספרבילית.

משפט

I. כל שדה ממאפיין 0 הוא מושלם.

II. כל שדה סופי הוא מושלם.

הוכחה

צריך להוכיח: אם $f \in F[\lambda]$ אי פריק אז הוא ספרבילי.

I. הוכחנו כי $f \Leftarrow f' = 0$ קבוע.

II. ניקח $K = F[\lambda]/F[\lambda]f$.

$$|K| = |F|^{[K:F]} = |F|^{\deg f} < \infty$$

לכן K שדה פיצול של $\lambda^{|K|} - \lambda$ ספרבילי, ו f מחלק אותו $f \Leftarrow$ ספרבילי.

טענה

עבור ρ שורש n -פרימיטיבי של 1

$$(U(n) =) \quad \text{Lulen}(n) \equiv \underbrace{\text{Gal}(Q[p]_G/Q)}_G$$

הוכחה

הוכחנו: פולינום הציקלוטומי f_n הוא אי פריק מעל \mathbb{Q} (מדרגה $\varphi(n)$). לכן $|G| = |\text{Lulen}(n)|$. לכל $1 < i < n$ עבור $(i, n) = 1$ יש אוטומורפיזם σ_i של $\mathbb{Q}[\rho]$ לפי $\rho \mapsto \rho^i$. לכן אפשר להגדיר העתקה חח"ע ועל $\text{Lulen} \rightarrow G$ לפי $\varphi : \text{Lulen} \rightarrow G$ לפי $\psi(i, j) = \sigma_{ij}$

$$\sigma_{jk} = \sigma_{ij} : \rho \rightarrow \rho^{ij} = (p^i)^j = (\sigma_i(\rho))^j = \sigma_j \sigma_i(\rho)$$

משפט

אם K/F הרחבה ספרבילית (ממימד סופי) אז קיים רק מס' סופי של שדות ביניים.

הוכחה

ניקח סגור הנורמלי E של K .
Galois E/F . מס' שדות ביניים $(F \subseteq L \subseteq E)$ הוא $[E : F] = [K : F]!$
 $\infty > [K : F]! \geq [E : F] = |\text{Gal}(E/F)|$.

המשפט הראשי(השני?) של תורת Galois

I. אם E/F Galois ו- $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset \{e\}$ תת חבורות אז

$$E^G = F \subseteq E^{G_1} \subset \dots \subset E^{\{e\}} = E$$

שרשרת של שדות ביניים.

II. אם $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_t = E$ אז

$$\text{Gal}(E/F) \supset \text{Gal}(E/F_1) \supset \dots \supset \text{Gal}(E/F_t) = \{e\}$$

שרשרת תת חבורות של $G = \text{Gal}(E/F)$ אז

$$E^{G_{i+1}}/E^{G_i} \iff G_{i+1} \triangleleft G_i$$

$$\text{Gal}(E^{G_{i+1}}/E^{G_i}) \cong G_i/G_{i+1}$$

הוכחה

מיידי מהמשפט המרכזי.

הגדרה

G חבורה פתירה אם יש סדרה כמו i עם כל $G_{i+1} \triangleleft G_i$ ו- G_i/G_{i+1} אבלי.

עובדות

I. G פתירה $\iff G^{(t)} = \{e\}$ לאישהו t .

$$G' = G^{(1)} = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$$

$$G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$$

$$G \supset G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \dots$$

II. אם G פתירה(סופית) אז אפשר לעדן את הסדרה כך שכל מנה היא ציקלית מסדר ראשוני.

III. אם G חבורת- p - כלומר $|G| = p^t$ - אז G פתירה, אפילו נילפוטנטית ($\leq G_i/G_{i+1}$)
 $(Z(G/G_{i+1}))$

המשפט היסודי של האלגברה

אם $f \in \mathbb{C}[\lambda]$ אז f מתפרק.

הוכחה

מספיק להוכיח שיש ל f שורש (אינדוקציה קלה) (נניח $\deg f > 1$)

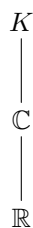
I. מילון תרגום לשדות: I. אין ל F שורש \iff יש גורם אי פריק g של f מדרגה גדולה

מ1 בלי שורש $\iff 1 < [K : F] < \infty$ עבור $K = F[\lambda]/F[\lambda]_g$

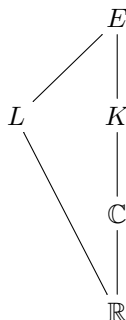
II. אם $a \in \mathbb{C}$ אז $\sqrt{a} \in \mathbb{C}$. תרגום: אם $1 < [K : F] < \infty$ אז $[K : F] \neq 2$ (לפי הנוסחה הריבועית).

III. אם $f \in \mathbb{R}[\lambda]$ ו $\deg f$ אי זוגי אז יש ל f שורש. תרגום: אם $[K : \mathbb{R}] < \infty$ אז הוא זוגי. (אם $[K : \mathbb{R}]$ אי זוגי אז ניקח $a \in K \setminus \mathbb{C}$ ואז $[K : \mathbb{R}] \mid \deg a$ אי זוגי \iff הפולינום המינימלי אי זוגי לכן פריק)

המשך הוכחת המשפט



נניח $1 < [K : \mathbb{C}] < \infty$. ניקח $a \in K \setminus \mathbb{C}$. אפשר להניח $K = \mathbb{C}[a]$. ניקח f פולינום המינימלי של a מעל \mathbb{R} (אפשר לקחת ff' במקום f). ניקח E סגור הנורמלי מעל \mathbb{R} .



$G = \text{Gal}(E/\mathbb{R})$. ניקח $H =$ תת חבורת סילו-2 של G ו $L = E^H$:

$$[L : \mathbb{R}] = \frac{[E : \mathbb{R}]}{[E : L]} = \frac{\overbrace{|G|}^{\text{odd}}}{|H|}$$

$E^H = L = \mathbb{R} \iff [L : \mathbb{R}] = 1$ לכן
 $|Gal(E/\mathbb{C})| = 2^m$ לכן נגיד $G = H \iff E^G = \mathbb{R} = E^H$ לכן חזקת G - נגיד 2 .
 $[F_2 : \mathbb{C}] = 2$ כאשר $\mathbb{C} < F_2 < F_3 < \dots < E$ לכן קיימת שרשרת
 2^{m-1} לכן פתירה. לכן קיימת שרשרת $\mathbb{C} < F_2 < F_3 < \dots < E$ כאשר $[F_2 : \mathbb{C}] = 2$
 בסתירה לעובדה הקודמת(אין הרחבה ריבועית של \mathbb{C})