אלגברה לינארית 2 (88113) – פתרון בחינה (מועד ג׳)

פרופ׳ רון עדין

הפתרונות כאן מנוסחים בקיצור נמרץ.

בהצלחה !

.1

א. הגדירו: העתקה צמודה, תת-מרחב ניצב.

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $T:V\to V$ אופרטור לינארי כלשהו. הוכיחו: $(\operatorname{im}T)^{\perp}=\ker T^{*}$

אם $u\in\ker T^{*}$ אז לכל $v\in V$ מתקיים $\langle T(v),u\rangle=\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle v,\vec{0}\rangle=0$, ולכן $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$; ואם $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$ אז, לכל $v\in V$, $\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle T(v),u\rangle=0$, ולכן $T^{*}(u)=\vec{0}$ כלומר $u\in\ker T^{*}$. בסה״כ: $u\in\ker T^{*}\Leftrightarrow u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$.

ג. בנתוני הסעיף הקודם הוכיחו: $(\ker T)^{\perp}=\operatorname{im}T^{*}$. מותר להשתמש במסקנת הסעיף הקודם, גם אם לא הוכחתם אותה.

נשתמש במסקנת סעיף ב׳ עבור T^{*} במקום T: $(\operatorname{im}T^{*})^{\perp}=\ker T^{**}$. כמובן $T^{**}=T$, וע״י לקיחת מרחב ניצב נקבל $(\ker T)^{\perp}=(\operatorname{im}T^{*})^{\perp\perp}=\operatorname{im}T^{*}$.

.2

א. תהי

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&4\\-1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור A.

פ״א: $x^{3}-x$, ע״ע: $1,0,-1$; מרחבים עצמיים (שאבריהם וקטורי עמודה):

$$V_{1}=span\{(2,0,1)\},\quad V_{0}=span\{(4,-1,2)\},\quad V_{-1}=span\{(1,-1,1)\}$$

ב. עבור A מהסעיף הקודם חשבו במפורש את A^{100}.

לפי סעיף א׳, $A=PDP^{-1}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}2&4&1\\0&-1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. לכן

$$A^{100}=(PDP^{-1})^{100}=PD^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&1\\0&-1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&-1&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4&8\\1&0&-2\\-2&2&5\end{pmatrix}$$

למעשה, בשאלה זו אפשר להימנע מחישוב P^{-1} מכיוון שכאן $D^{3}=D$ ולכן

$$A^{100}=PD^{100}P^{-1}=PD^{2}P^{-1}=A^{2}=\begin{pmatrix}-3&4&8\\1&0&-2\\-2&2&5\end{pmatrix}$$

ג. עבור A הנ"ל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה $B=\left(A+2I\right)^{100}$;
אין צורך לחשב במפורש את B.

עבור P מסעיף ב: $P^{-1}BP=P^{-1}(A+2I)P=P^{-1}AP+2I=D+2I=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ולכן הע"ע של B הם $3,2,1$ והע"ע של B^{100} הם $3^{100},2^{100},1$ (כל אחד בריבוי 1). הפולינום האופייני של B^{100} הוא, לפיכך, $\left(x-3^{100}\right)\left(x-2^{100}\right)(x-1)$.

3.

א. הגדירו: ליכסון מטריצה, שילוש מטריצה.

ב. תהיינה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&4\\0&0&6\end{pmatrix}$$

קבעו, עבור כל שתים מהמטריצות הנ"ל, האם הן דומות. נמקו.

כל המטריצות הן משולשיות, ולכן אברי האלכסון הם הערכים העצמיים. למטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים, ולכן A לא דומה ל- C וגם B לא דומה ל- C. מצד שני, לכל אחת מהמטריצות יש 3 ע"ע שונים ולכן היא ניתנת לליכסון; ומכאן נובע ש- A וגם B דומות לאותה מטריצה אלכסונית, ולכן דומות זו לזו.

ג. תהיינה $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכיחו: אם A הרמיטית ו- B אנטי-הרמיטית אז $A=B=0$.

A הרמיטית, ולכן ניתנת לליכסון (אוניטרי) עם ע"ע ממשיים. B אנטי-הרמיטית, ולכן ניתנת לליכסון (אוניטרי) עם ע"ע מדומים טהורים. למטריצות דומות יש אותם ע"ע, והמספר היחיד שהוא גם ממשי וגם מדומה טהור הוא אפס. לכן A (וגם B) דומה למטריצת האפס, ובהכרח $A=B=0$.

4. תהי $q(x,y)=x^2+4xy-2y^2$ תבנית ריבועית מעל $\mathbb{R}$.

א. רשמו מטריצה מייצגת סימטרית A עבור $q(x,y)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$$

ב. מצאו את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של A.

ערכים עצמיים: $2,-3$; מרחבים עצמיים (שאבריהם וקטורי עמודה):

$V_2=span\left\{(2,1)\right\},\quad V_{-3}=span\left\{(-1,2)\right\}$

ג. תארו במילים את אוסף הפתרונות של המשוואה $q(x,y)=1$ (למשל: אליפסה, פרבולה, זוג ישרים נחתכים וכו'). נמקו.

לפי סעיף ב', בקואורדינטות מתאימות (אחרי ליכסון אוניטרי) המשוואה היא $2\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2=1$, ולכן זו היפרבולה.

5. יהיו: $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה, $W=\{(x,y,z)\in V \mid x+2y+z=0\}$.

א. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור W.

בסיס ל- W, כמרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית, הוא למשל $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$. בעזרת תהליך גרם-שמידט נקבל בסיס אורתונורמלי, למשל $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0),\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)\right\}$.

ב. השלימו את הבסיס מהסעיף הקודם לבסיס אורתונורמלי של V.

הוקטור $(1,2,1)$ ניצב, כמובן, לשני אברי הבסיס ולכן נותר רק לנרמל אותו ולקבל $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0),\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right\}$. אפשר גם להתחיל מוקטור כלשהו מחוץ ל- W ולבצע תהליך גרם-שמידט בהמשך לתשובה של סעיף א'.

ג. מצאו את ההיטל הניצב של $v=(3,3,3)\in V$ על הישר $W^{\perp}$.

ההיטל הניצב הוא כמובן וקטור מהצורה $c\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, כאשר $c=\left\langle(3,3,3),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right\rangle=\frac{12}{\sqrt{6}}$. זהו הוקטור $(2,4,2)$.

<u>בדיקה</u>: $(3,3,3)-(2,4,2)=(1,-1,1)\in W$.