תרגול כיתה 4 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

התפלגויות (בדידות) מיוחדות

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות:

התפלגות בינומית $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

מ"מ X – סופר מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי (0 או 1). כאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

P(X = k) – ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n. (k = 0,…,n)

התוחלת והשונות: $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$ $\quad E(X)=n\cdot p$

התפלגות גיאומטרית $X \sim Geo(p)$

$$P(X=k)=(1-P)^{k-1}\cdot P \qquad k=1,..,n$$

מ"מ X – סופר את מספר הנסיונות עד להצלחה הראשונה (כולל ההצלחה הראשונה).

התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$ $\quad E(X)=\frac{1}{p}$

הערה: להתפלגות גיאומטרית יש תכונת "חוסר זיכרון" ומתקיים

$P(X=s+t\mid X=t)=P(X=s)$ לכל $s,t\geq 0$.

התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

התוחלת והשונות: $E(X)=V(X)=\lambda$

התפלגות בינומית שלילית $X \sim NB(r,p)$

מ"מ X מייצג את מספר הניסויים שיש לבצע על מנת לקבל בדיוק r הצלחות.

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad ,k=r,r+1....$$

התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$ $\quad E(X)=\frac{r}{p}$

התפלגות היפר-גיאומטרית $X \sim HG(m,N,n)$

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \qquad k=0,1,..,n$$

בוחרים באקראי מדגם מגודל n , מתוך כד המכיל N כדורים – m לבנים ו N –m שחורים.

מ"מ X = מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

התוחלת והשונות: $V(X)=\frac{N-n}{N-1}n\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{m}{n}$ $\quad E(X)=n\frac{m}{N}$

<u>תרגיל 1</u>

בכד יש כדור אדום וכדור כחול. בכל פעם מוציאים כדור באקראי ומחזירים אותו עם כדור נוסף באותו הצבע. הוכח שהתפלגות מספר הכדורים האדומים בשלב ה-n היא אחידה.

<u>פתרון:</u>

בשלב הראשון, התפלגות מספר הכדורים האדומים היא קבועה (שזה מקרה פרטי של אחידה) על 1.

נניח באינדוקציה כי בשלב ה-$n-1$ התפלגות מספר הכדורים האדומים אחידה.

נסמן ב-X את מספר הכדורים האדומים בשלב n וב-Y את מספר הכדורים האדומים בשלב $n-1$. כעת ברצוננו לחשב מה הסיכוי כי בשלב n יהיו k כדורים אדומים.

בשלב ה-$n-1$ ישנם $n+1$ כדורים בכד. אם מתוכם $k-1$ אדומים, אזי הסיכוי לבחור כדור אדום הוא $\frac{k-1}{n+1}$, כלומר הסיכוי שייתווסף כדור אדום ויהיו k כדורים אדומים בשלב n הוא $P(X=k \mid Y=k-1)=\frac{k-1}{n+1}$.

אם בשלב ה-$n-1$ ישנם k כדורים אדומים אזי הסיכוי לבחור כדור כחול הוא $\frac{n+1-k}{n+1}$, כלומר הסיכוי שיתווסף כדור כחול אדום ויהיו k כדורים אדומים בשלב n הוא $P(X=k \mid Y=k)=\frac{n+1-k}{n+1}$.

אם מספר הכדורים בשלב $n-1$ שונה מ-k ומ-$k-1$ אזי אין סיכוי שבשלב ה-n יהיו k כדורים אדומים, כלומר לכל $i \neq k, k-1$, $P(X=k \mid Y=i)=0$.

כעת,

$$P(X=k)=\sum_{i=1}^{n}P(X=k\mid Y=i)P(Y=i)=\frac{k-1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n+1-k}{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{k+n+1-k}{(n+1)n}=\frac{1}{n+1}$$

משמע, ההסתברות שווה לכל ערך, דהיינו ההתפלגות אחידה.

<u>תרגיל 2</u>

בכד n כדורים. מגרילים $X\sim Bin(n,p)$ וצובעים X מן הכדורים.

1. מוציאים כדור מן הכד. מה הסיכוי שהוא צבוע?
2. בלי להחזיר את הכדור הראשון, מוציאים כדור שני. מה הסיכוי שהוא צבוע?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- Y את המשתנה המחזיר 1 אם הכדור הראשון שהוצאנו צבוע ו-0 אחרת.

$$P(Y=1)=\sum_{k=0}^{n}P(Y=1\mid X=k)P(X=k)=$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}=p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-k-1}=$$
$$p(p+1-p)^{n-1}=p$$

נסמן ב- Z את המשתנה המחזיר 1 אם הכדור השני צבוע ו-0 אחרת.

$$P(Z=1)=P(Z=1,Y=0)+P(Z=1,Y=1)$$

$$P(Z=1,Y=0)=\sum_{k=0}^{n}P(Z=1,Y=0\mid X=k)P(X=k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}=p(1-p)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{n-k-2}=p(1-p)$$

$$P(Z=1,Y=1)=\sum_{k=0}^{n}P(Z=1,Y=1\mid X=k)P(X=k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2}(1-p)^{n-k-2}=p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{n-k-2}=p^2$$

ועל-כן $P(Z=1)=p(1-p)+p^2=p$.

<u>תרגיל 3</u>

שני שחקנים מחלקים ביניהם n מטבעות הוגנים. מטילים את כולם. השחקן הראשון מקבל את אלו שנפלו על "עץ" והשני את אלו שנפלו על "פלי". לאחר מכן מטיל שוב כל שחקן את המטבעות שברשותו ומפסיד מתוכם את אלו שלא נפלו כבפעם הראשונה.

1. איך מתפלג הרווח של השחקן הראשון?
2. כעת שחקן אחד מטיל את כל המטבעות, אחד אחרי השני. מה ההסתברות שהרווח שלו, בעת קבלת תוצאת ההטלה מהמטבע ה-$2k$ ($2k<n$), יהיה בין 1 ל- k?

פתרון:

1. כל מטבע, הסיכוי שיפול על "עץ" פעמיים הוא $\frac{1}{4}$, ומכיוון שהטלות המטבעות הן בלתי-תלויות זו בזו, הרווח X של השחקן הראשון מתפלג לפי $X \sim Bin(n,\frac{1}{4})$.

2. נחשב את ההסתברות שהרווח שלו בדיוק j מיד לאחר 2k הטלות:
(הרווח מתפלג בינומית שלילית)

$$P(X=j)=\binom{2k-1}{j-1}p^j\left(1-p\right)^{2k-j}=\binom{2k-1}{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

כעת נסכם על כל האפשרויות, מ-1 ועד k:

$$P(X\le k)=\sum_{j=1}^{k}\binom{2k-1}{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{k}\binom{2k-1}{j-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\cdot 2^{2k-2}=\frac{1}{4}$$

(המעבר האחרון מסכום ל- 2^{2k-2} נובע מזהות קומבינטורית)

תרגיל 4

יואב וחנן זורקים לסל כדורים לסירוגין. יואב קולע בסיכוי 0.7 וחנן בסיכוי 0.4. חנן מתחיל. מה הסיכוי ששתי הקליעות הראשונות תהיינה רצופות?

פתרון:

1. נסמן ב- X את מספר הנסיונות עד הקליעה הראשונה של יואב, $X \sim G\left(0.7\right)$
וב-Y את מספר הנסיונות עד הקליעה הראשונה של חנן, $Y \sim G\left(0.4\right)$.

כעת,

$$P(Y = X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k)P(X = k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0.6^{k-1} \cdot 0.4 \cdot 0.3^{k-1} \cdot 0.7 = 0.28 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.18^{k} = 0.28 \cdot \frac{1}{1-0.18}$$

$$P(Y = X+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k+1)P(X = k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0.6^{k} \cdot 0.4 \cdot 0.3^{k-1} \cdot 0.7 = 0.168 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.18^{k} = 0.168 \cdot \frac{1}{1-0.18}$$

הסיכוי שהקליעות הראשונות תהיינה ברצף הוא הסכום של השניים, דהיינו

$$\frac{0.196}{1-0.18} \approx 0.239 .$$

<u>תרגיל 5</u>

מחלקת צנחנים כוללת 20 חפ"שים וקצין. המחלקה יוצאת למסלול. הסיכוי של חפ"ש לסיים הוא 0.8, בעוד שהקצין יסיים בביטחון מלא. הראשון שמגיע לקו הסיום מכין קפה לכל השאר. בהנחה שמתוך המסיימים לכל אחד יש סיכוי שווה להגיע ראשון, מהו הסיכוי שהקצין יכין את הקפה?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב X את מספר החפ"שים שסיימו את המסלול. נסמן ב- Y את המשתנה המחזיר 1 אם הקצין מכין קפה ו-0 אחרת.

$$P(Y = 1) = \sum_{n=0}^{20} P(Y = 1 \mid X = n)P(X = n) =$$

$$\sum_{n=0}^{20} \frac{1}{n+1}\binom{20}{n} 0.8^{n} \cdot 0.2^{20-n} = \frac{1}{21}\sum_{n=0}^{20}\binom{21}{n+1} 0.8^{n} \cdot 0.2^{20-n} =$$

$$\frac{1}{21\cdot 0.8}\sum_{n=1}^{21}\binom{21}{n} 0.8^{n} \cdot 0.2^{21-n} = \frac{1}{21\cdot 0.8}(1-0.2^{21}) \approx 0.0595$$

תרגילים נוספים + פתרונות

שאלה 1

יוסי מקבל דמי כיס פעם בחודש ואז הוא מחליט אם לקנות לעצמו ספר חדש או לא. ההסתברות שיוסי יקנה ספר חדש היא 0.6. נניח שבהתחלה לא היה ליוסי אף ספר.

א) מהי ההסתברות שאחרי 10 חודשים, יש ליוסי 6 ספרים?
ב) מהי תוחלת ושונות מספר הספרים שיש ליוסי בתום ששה חודשים?
ג) מה ההסתברות שליוסי יהיו 4 ספרים בדיוק לאחר ששה חודשים?

פתרון:

נגדיר מ"מ X = מספר הספרים שיש ליוסי לאחר תקופה מסוימת.

א) ההסתברות המבוקשת:

$$X \sim Bin(10,0.6) \qquad \Rightarrow P(X=6)=\binom{10}{6}(0.6)^6(0.4)^4=0.2580$$

ב) התוחלת והשונות של מס' הספרים:

$$X \sim Bin(12,0.6)$$
$$E(X)=np=12\cdot(0.6)=7.2$$
$$V(X)=npq=12\cdot(0.6)\cdot(0.4)=2.88$$

ג) נתון שבחודש השישי יוסי קונה ספר רביעי, לכן מדובר ההתפלגות בינומית שלילית.
$X \sim NB(4,0.6)$. וההסתברות המבוקשת -

$$P(X=4)=\binom{6-1}{4-1}(0.6)^4(0.4)^2=0.20736$$

שאלה 2

סטודנט שמתמחה ברפואה חייב לעבור 5 מבחני ביניים בהליך הסמכתו בכדי לקבל את רשיון הרופא. ההסתברות לעבור כל מבחן, בלי תלות במבחנים האחרים, היא 0.7. אם הוא לא עובר איזשהו מבחן – אז הוא לא ממשיך הלאה בהליך הסמכתו. מה ההסתברות ש-

א) שהוא יכשל במבחן החמישי?
ב) שהוא יעבור פחות מ-3 מבחנים?
ג) ידוע שסטודנט עבר כבר 2 מבחנים, מה ההסתברות שיעבור עוד 2 מבחנים בהצלחה?
ד) מקבוצה של סטודנטים שעומדת להתחיל את מבחני הסמכתם נבחר סטודנט באופן מקרי. מהו ממוצע המבחנים שהוא יעבור? מה השונות?

פתרון:

א) "הצלחה" בשאלה זו = הסתברות לכשלון במבחן, שהיא 0.3 כלומר $X \sim G(0.3)$

$$P(X=5)=(0.7)^4(0.3)=0.07203$$

ב) יעבור פחות מ-3 מבחנים = יכשל ב- 1 -או- יכשל ב- 2 -או- יכשל ב- 3 מבחנים:

$$P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=0.3+(0.7)(0.3)+(0.7)^2(0.3)=0.657$$

ג) נעזר בתכונת חוסר הזכרון:

$$P\left(X=(2+2)\mid X=2\right)=(0.7)^2(0.3)=0.147$$

ד) ממוצע המבחנים שהסטודנט יעבור: $E(X)=1/p=1/0.3=3.333$

השונות: $V(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{1-0.3}{0.3^2}=7.777$