

תרגיל בית 4 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. (חימום) מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5 .

שאלה 2. רמז: הסעיפים הבאים דורשים קצת קומבינטוריקה.

1. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6 .

2. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6 .

שאלה 3. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2 , את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

1. $\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right) \in S_9$

2. $(1\ 2)(2\ 5\ 4)(3\ 1\ 4)(1\ 5) \in S_5$

שאלה 4. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma(a_1, a_2, \dots, a_k) \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_k))$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)(4\ 5)$ ו- $a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma(2\ 3\ 5\ 6)\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

כרשות, האם אתם יכולים למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי?

שאלה 5. נתבונן ב- S_n עבור $n > 2$.

1. הוכיחו שלכל מחזור $\tau \in S_n$ $\text{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau\sigma \neq \sigma\tau$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

2. הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\text{id}\}$.

שאלות רשות

שאלה 6. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$. התוכנה תחזיר בפלט את התמורה כמכפלת מחזוריים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותחזיר את מכפלתן כמכפלת מחזוריים זרים.

שאלה 7. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש- σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו- τ הן זרות אם

$$\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$$

הוכיחו כי אם שני מחזוריים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

שאלה 8. תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם

$$|\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau)| = 1$$

אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3. רמז: הראו כי $\text{supp}(\sigma^{-1}) = \text{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.