תרגיל 5 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. להלן עובדה שהשתמשתי בה בתרגול ואמרתם לי שלא ראיתם בקורס הקודם:
יהי p מספר ראשוני, אזי הפולינום

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$$

הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.
הוכיחו קביעה זו. הדרכה:

(א) ראשית הוכיחו כי אם p ראשוני ו $0 < k < p$ אז

$$p \mid \binom{p}{k}$$

(ב) שימו לב ש

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

(ג) החליפו את x ב $x + 1$ והשתמשו בקריטריון אייזנשטיין.

2. הנה עוד עובדה שחשוב להכיר: יהי F ממאפיין p אז מתקיים שלכל $a, b \in F$

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

דרך אחרת להגיד את זה: הפונקציה $f(x) = x^p$ היא הומומורפיזם (כי קל להראות שהיא שומרת כפל) .
הוכיחו טענה זו.

3. האם הפולינומים הבאים ספרביליים?

(א) $x^3 + x^2 - x - 1$ מעל $\mathbb{Q}$.

(ב) $x^3 + x^2 - x - 2$ מעל $\mathbb{Q}$.

(ג) $x^{10} + x^5 + 3$ מעל $\mathbb{Z}_5$.

(ד) $x^{17} - x$ מעל $\mathbb{Z}_{17}$.

4. תהי $K \subseteq F$ הרחבת שדות ממימד 2. הראו ש K שדה פיצול של פולינום כלשהוא ב $F[x]$.

5. תהי $K \subseteq F$ הרחבת שדות. נניח ש $f(x) \in F[x]$ ספרבילי כך ש $f = g_1 g_2$ עבור $g_1, g_2 \in K[x]$. הוכיחו כי

$$\gcd(g_1, g_2) = 1$$