

שיעורי בית 2

1. נגדיר M להיות כל המטריצות מגודל $\infty \times \infty$ עם רכיבים ממשיים שמקיימות שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. כלומר

$$M = \left\{ (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty} \mid [\forall i : \#\{a_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} < \infty] \wedge [\forall j : \#\{a_{i,j} \neq 0 : i \in \mathbb{N}\} < \infty] \right\}$$

על M נגדיר פעולה של בדומה לכפל במטריצות מגודל סופי. כלומר לכל $A, B \in M$ את הכפל בניהם ע"י

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & & \end{pmatrix} \text{ שניהם שייכים ל } M \text{ והכפל בניהם למשל } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & & \end{pmatrix} \text{ ו } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי הפעולה מוגדרת היטב, כלומר $AB \in M$

(ב) הוכיחו כי ביחס לפעולה זאת M הוא מונואיד.

(ג) מצאו דוגמא לאיבר $A \in M$ שיש לו הפיך ימיני אך אין לו הפיך שמאלי

2. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקוטרניונים: נגדיר

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) = a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

3. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי \sim יחס שקילות על G .

(ב) עבור $G = S_n$ ויחס ההצמדה: הוכיחו כי מתקיים $[(1, 2)] = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ כאשר $[(1, 2)]$ זה מחלקת השקילות של $(1, 2)$ של יחס ההצמדה [רמז: ש.ב. משבוע שעבר]. הסיקו כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1, 2)$?

4. הגדרה: תהא G חבורה. נסמן את המרכז של G ב- $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : gx = xg\}$. המרכז של G זה כל האיברים ב- G שמתחלפים עם כל איבר אחר.

(א) הוכיחו כי $Z(G)$ חבורה. והוכיחו כי זוהי חבורה חילופית.

(ב) לכל $g \in Z(G)$ מצאו את גודל מחלקת הצמידות של g

5. תהא G חבורה בה מתקיים $(g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2$. $\forall g_1, g_2 \in G$. הוכח כי G חבורה חילופית.

6.

(א) ראינו בתירגול כי הגדרה שקולה ל- \mathbb{Z}_n . נגדיר יחס שקילות על \mathbb{Z} ע"י

$$x \equiv y \iff n \mid x - y$$

את קבוצת המנה ניתן להציג כ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

והגדרנו את הפעולה

$$[a] + [b] = [a + b]$$

שאיתה נקבל חבורה חיבורית $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. כעת נגדיר עוד פעולה על קבוצה זאת: לכל $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ נגדיר פעולת כפל

$$[a][b] = [ab]$$

הוכיחו כי פעולה זאת מוגדרת וביחס אליה נקבל כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ מונואיד.

(ב) בעזרת סעיף קודם חשבו את

$$7^n - 3^n \pmod{8}$$

לכל n טבעי.