שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) $A \cap B \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(2) $A \subseteq B \times C$ לא ריקה. $\Leftrightarrow$ קיימות קבוצות: $A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C$ כך ש: $A = A_1 \times A_2$.

(3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

פתרון.

(1) נוכיח.

$$(a, b) \in A \cap B \times C \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B) \wedge (b \in C) \Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (b \in C)) \wedge ((a \in B) \wedge (a \in C)) \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times C) \cap (B \times C)$$

(2) נפריך את הכיוון "$\Leftarrow$", הכיוון השני נכון. ניקח $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $B, C = \{0, 1\}$. אם קיימות $A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C$ כך ש: $A = A_1 \times A_2$ אזי $1, 0 \in A_1 \cap A_2$ מהגדרת מכפלה קרטזית, אבל אז נקבל כי $\{(1,1),(0,0)\} \subseteq A_1 \times A_2$ ולכן $A \subsetneq A_1 \times A_2$ בסתירה.

(3) דומה להוכחה של (1).

שאלה 2. (הבהרה) יהי L ממשי. נסתכל על $\mathbb{Q}_{\text{seq}} := \{x \subseteq \mathbb{Q} \colon x = \langle x_n \colon n \in \mathbb{N} \rangle\}$. נגדיר על $\mathbb{Q}_{\text{seq}}$ יחס R באופן הבא:

$$xRy \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \mid x_n - y_n \mid = L$$

א. הוכיחו או הפריכו כי R יחס שקילות. אם לא, מצאו L מתאים עבורו R יחס שקילות על הקבוצה הנ"ל והשתמשו בו לסעיפים הבאים.

ב. יהי $x \subseteq \mathbb{Q}$ סדרה קבועה כלשהי. חשב את: $[x]_R$.

ג. האם קבוצת המנה: $\{[x]_R : x \in \mathbb{Q}_{\text{seq}}\}$ סופית? הראו זאת.

פתרון.

א. נשים לב כי על מנת ש-R יהיה רפלקסיבי עלינו לדרוש כי $L = 0$ אחרת

$$\forall x \in \mathbb{Q}_{\text{seq}} \colon \lim_{n \to \infty} \mid x_n - x_n \mid = 0 \neq L$$

כלומר נקבע כי $L = 0$ ונבדוק האם יח"ש.

(1) רפלקסיביות: נבדק בקביעת L.

(2) סימטריות: נניח $x, y \in \mathbb{Q}_{\text{seq}}$ המקיימים xRy. נבקש להראות כי yRx מתקיים. אבל מההנחה נובע כי $\lim_{n \to \infty} \mid x_n - y_n \mid = 0$ מצד שני לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\mid x_n - y_n \mid = \mid y_n - x_n \mid$ ולכן $0 = \lim_{n \to \infty} \mid x_n - y_n \mid = \lim_{n \to \infty} \mid y_n - x_n \mid$. $\Leftarrow yRx$ כדרוש.

(3) טרנזיטיביות: יהי $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\text{seq}}$. נניח כי yRz , xRy ונרצה להראות כי xRz. נחשב: $0 \leq \mid x_n - z_n \mid \leq \mid x_n - y_n \mid + \mid y_n - z_n \mid \to_{n \to \infty} 0$. ממשפט הסנדוויץ' נקבל כי: $\lim_{n \to \infty} \mid x_n - z_n \mid = 0$ ולכן xRz כדרוש.

ב. יהי c ממשי ונניח כי לכל n טבעי $x_n = c$. אזי:

$$[x]_R =_{\text{def}} \{a \in \mathbb{Q}_{\text{seq}} \colon aRx\} = \{a \in \mathbb{Q}_{\text{seq}} \colon \lim_{n \to \infty} \mid a_n - c \mid = 0\} =_{\text{הגדרה של התכנסות סדרות}} \{a \in \mathbb{Q}_{\text{seq}} \colon \lim_{n \to \infty} a_n = c\}$$

ג. לכל m טבעי נגדיר את הסדרה x^m להיות: $x^m = \langle n \cdot m : n \in \mathbb{N} \rangle$. אלו הן סדרות שלא מתייחסות אחת לשניה (למה?). לכן קבוצת המנה אינסופית. (שאלה: מהי עוצמת קבוצת המנה?)

שאלה 3. הראו בכל אחד מהמקרים הבאים האם הקבוצה היא יחס על A, אם כן האם הוא יחס שקילות? הראו זאת.

א. $A = \mathbb{Q}$ ומתקיים: $q_0 R q_1 \Leftrightarrow | q_0 - q_1 | \in \mathbb{N}$.

ב. $A = \mathbb{Z}$ ומתקיים: $aRb \Leftrightarrow 7 \mid (a-b)$.

ג. $A = \{(1,1),(0,5),(-1,84),(23,-67),(-51,100)\}$ ונגדיר: $R = \{(0,5),(23,-67)\}$.

ד. $A = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots \times \mathbb{N}}_{n\ times}$ ומתקיים: $xRy \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} x_k + y_k > 0$

שאלה 4 (רשות).

א. יהי x, y תתי קבוצות אינסופיות של $\mathbb{N}$. נגדיר יחס $\sim$ על $x \triangle y$ באופן הבא:

$$n \sim m \Leftrightarrow ([n,m] \cap x \triangle y \subseteq x \setminus y) \vee ([n,m] \cap x \triangle y \subseteq y \setminus x)$$

הראו כי זהו יחס שקילות.

ב. הראו כי אם x סופית, אזי קבוצת המנה: $\{[a]_\sim : a \in x \triangle y\}$ סופית.

ג. ניקח $x = \{1,6,100\}$ ו-$y = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$ חשבו את כל מחלקות השקילות השונות שמגדיר היחס $\sim$.