המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

אנליזה מודרנית – 88 341 – 01/04 – סמסטר א' תשע"ז

מבחן מועד ב'

יום ד', י' באדר תשע"ז, 8.3.17

מרצים: בוריס סולומיאק, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.

ג. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף הבחינה.

<u>ענה על אחת משתי השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח את הלמה של פטו (Fatou) ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.
   ב. הוכח בעזרת הלמה של פטו את משפט ההתכנסות הנשלטת.

2. יהי H מרחב הילברט ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה אורתונורמלית של וקטורים ב H. הראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ מתכנס ב H אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$.

<u>ענה על שלוש מבין ארבע השאלות הבאות:</u>

3. נגדיר $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ע"י: $F(y) := \int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-x}}{x}\,dx$.

   א. הראה ש F אכן מוגדרת. ב. האם F גזירה? אם כן מהי F' ?

4. יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה ו $\mu(X)<\infty$. תהי $f:X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה, ונסמן $E_n=\{x: f(x)\geq n\}$. הראה ש $\int_X f\,d\mu<\infty$ אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$.

5. יהי $(X,\mathbb{A})$ מרחב מדיד, ותהי $f_n: X\to[0,1]$ סדרה של פונקציות מדידות.
   תהי E קבוצת כל הנקודות $x\in X$ שעבורם הסדרה $f_n(x)$ היא סדרה מתכנסת.
   הראה ש E קבוצה מדידה.

6. תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות רציפות בהחלט המתכנסת נקודתית לפונקציה f.
   הראה שאם סדרת הנגזרות f_n' (המוגדרות כ.ב.מ.) היא סדרה מתכנסת ב $L^1([a,b],m)$ אז f רציפה בהחלט.

בהצלחה!