אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 2

1. חשבו את $2A+3B-C$ עבור המטריצות
$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
פתרון: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

2. פתרו את המשוואה עבור X:
$$2A-X=3B$$
בהינתן המטריצות:
$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
פתרון: נעביר אגפים $X=2A-3B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 \\ -2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

3. חשבו את:

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$

(ג) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ד) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$

4. מצאו שתי מטריצות ריבועיות A,B מגודל 2×2 המקיימות
$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$$

פתרון: נקח למשל את $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

אז $(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

אבל $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

5. פתרו את המשוואה הבאה עבור X: $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\5&5\end{pmatrix}$.

פתרון:

ננסה למצוא הופכי ל $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, ננסה לפתור

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

וזה נותן שהמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (כן, כן, המטריצה היא ההופכית של עצמה.)

נכפול את שני האגפים של המשוואה בהופכי מצד שמאל

$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\2&1\end{pmatrix}$.

6. ידוע ש $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$,

פתרו את המערכת הבאה (לא בשיטה של גאוס)

$$\begin{cases}2x+y&=3\\x+y&=1\end{cases}$$

פתרון:.

נכניס את המערכת למטריצה $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

נכפול בהופכי מצד שמאל ונקבל : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.