מד"ר - הרצאה 2

2 באוגוסט 2011

הערה - רציפות של הנגזרות

במד"ר $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, כדי ש$y^{(n)}$ תהיה מוגדרת בכל נקודה, כל הנגזרות עד $y^{(n-1)}$ צריכות להיות גזירות, ואם f רציפה אז $y^{(n)}$ רציפה.

מד"ר פתורות ע"י משוואה הומוגנית

פונקציה הומוגנית מסדר n היא פונקציה $f\left(\lambda x, \lambda y\right) = \lambda^n f\left(x, y\right)$.
משוואה $y' = f\left(x, y\right)$ נקראת הומוגנית אם f הומוגנית מסדר 0, ואז ניתן לכתוב אותה בצורה $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
נניח $y^{'} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$.
<u>דוגמה:</u>
$y^{'} = \left(\frac{2x+3y+5}{x+8y-7}\right)^2$.
נחלק לשני מקרים:

מקרה 1

תהי $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ (כלומר הישרים נחתכים).
נשתמש בהחלפת משתנים $x = p + \alpha$ ו$y = q + \beta$.
$a_1x + b_1y + c_1 = a_1\left(p+\alpha\right) + b_1\left(q+\beta\right) + c_1 = a_1p + b_1q + c_1 + a_1\alpha + b_1\beta$
$ax + by + c = ap + bq + c + a\alpha + b\beta$.
נבחר α, β כך שמתקיים:
$c_1 + a_1\alpha + b_1\beta = 0$
$c + a\alpha + b\beta = 0$.
זה למעשה פתרון של המערכת:
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c \end{pmatrix}$$
מתקיים $y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dq}{dp} = f\left(\frac{a_1p+b_1q}{ap+bq}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{q}{p}}{a+b\frac{q}{p}}\right)$.
נציב $z = \frac{q}{p}$ כלומר $q = zp$ לכן $\frac{dq}{dp} = \frac{dz}{dp}\cdot p + z$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dp}\cdot p+z &= f\left(\frac{a_1+b_1z}{a+bz}\right)\\
\frac{dz}{dp}\cdot p &= f\left(\frac{a_1+b_1z}{a+bz}\right)\\
\frac{dz}{f\left(\frac{a_1+b_1z}{a+bz}\right)-z} &= \frac{dp}{p}\\
\int\frac{dz}{f\left(\frac{a_1+b_1z}{a+bz}\right)-z} &= \int\frac{dp}{p}+c
\end{aligned}
$$

נקבל $z(p)$ כלשהי, ואז $q=p\cdot z(p)$, נציב ונקבל:
$y-\beta=(x-\alpha)\cdot z(x-\alpha)$.

<u>דוגמה למקרה 1</u>

$y^{'}=\left(\frac{2x+3y+4}{x+y+2}\right)^2$.
נגדיר $x=p+\alpha$, $y=q+\beta$.
נקבל:

$$
y^{'}=\left(\frac{2p+3q+4+2\alpha+3\beta}{p+q+2+\alpha+\beta}\right)
$$

נמצא את α,β ע"י פתירת מערכת המשוואות, נקבל $\alpha=-2,\ \beta=0$.
עבור הבחירה הזו נקבל:

$$
\begin{aligned}
\frac{dq}{dp}=\left(\frac{2p+3q}{p+q}\right) &= \left(\frac{2+3z}{1+z}\right)\\
\frac{dz}{dp}\cdot p+z &= \frac{2+3z}{1+z}\\
\frac{dz}{dp}\cdot p=\frac{2+3z}{1+z}-z &= \frac{2+2z-z^2}{1+z}\\
\int\frac{1+z}{2+2z-z^2}dz &= \int\frac{dp}{p}+c\\
\int\frac{2-(1-z)}{z+2z-z^2}dz &= \ln|p|+c\\
\int\frac{2dz}{3-(1-z)^2}-\frac{1}{2}\ln\left|2+2z-z^2\right| &= \ln|p|+c\\
h\cdot\operatorname{arccot}f(z)-\frac{1}{2}\ln\left|2+2z-z^2\right| &= \ln|p|+c\\
h\cdot\operatorname{arccot}\left(f\left(\frac{y}{x+2}\right)\right)-\frac{1}{2}\ln\left|2+2\frac{y}{x+2}-\left(\frac{y}{x+2}\right)^2\right| &= \ln|x+2|+c
\end{aligned}
$$

זו פונקציה סתומה, מספיק טוב לנו כי התרגיל מגעיל.

מקרה 2

כאשר $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$.

$a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b$.

$$\begin{aligned} y^{'} &= f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right) \\ y^{'} &= f\left(\frac{\lambda ax + \lambda by + c_1}{ax + by + c}\right) \\ y^{'} &= f\left(\frac{(ax+by)\lambda + c_1}{(ax+by) + c}\right) \end{aligned}$$

ואת זה אנחנו יודעים לפתור משיעור שעבר.

<u>דוגמה למקרה 2</u>

$f\left(\frac{2x+4y+6}{x+2y-3}\right) = f\left(\frac{2(x+2y)+8}{(x+2y)-3}\right)$

מד"ר ליניאריות מסדר I

$y^{'} + p(x) \cdot y = q(x)$.

p, q פונק' של x בלבד.

אם $q(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

אם המשוואה הומוגנית, נפתור:

$$\begin{aligned} y^{'} &= -p(x)\, y \\ \frac{y^{'}}{y} &= -p(x) \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)\, dx \\ \ln|y| &= c - \int p(x)\, dx \\ y &= c' \cdot e^{-\int p(x)dx} \end{aligned}$$

שיטת וריאצית המקדמים

נסמן $y = c(x)\, e^{-\int p(x)dx}$.

נגזור:

$$y^{'} = c^{'}(x)\, e^{-\int p(x)dx} - c(x) \cdot p(x)\, e^{-\int p(x)dx}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} y^{'} &= -p(x) \cdot y + q(x) \\ &= -p(x) \cdot c(x)\, e^{-\int p(x)dx} + q(x) \end{aligned}$$

נשווה:

$$
\begin{aligned}
-p(x)\cdot c(x)e^{-\int p(x)dx}+q(x) &= c^{'}(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)\cdot p(x)e^{-\int p(x)} \\
q(x) &= c^{'}(x)e^{-\int p(x)dx} \\
c^{'}(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx} \\
c(x) &= \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c
\end{aligned}
$$

נציב בהתחלה ונקבל:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

דוגמה

1. מצאו פתרון כללי למשוואה:
$y^{'}=\frac{x^2-y}{x}$
2. מצאו פתרון פרטי המקיים $y(1)=5$.

פתרון

1. נפשט:

$$
\begin{aligned}
y^{'} &= x-\frac{y}{x} \\
y^{'}+\frac{y}{x} &= x
\end{aligned}
$$

במקרה הזה $p(x)=\frac{1}{x}$ ו-$q(x)=x$.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left[c+\int x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right] \\
&= e^{-\ln|x|}\cdot\left[c+\int x\cdot e^{\ln|x|}dx\right] \\
&= \frac{1}{|x|}\left[c+\int x\cdot|x|\,dx\right] \\
&= \frac{c}{|x|}+\frac{1}{|x|}\int x\cdot|x|\,dx \quad /\cdot\frac{\operatorname{sign}(x)}{\operatorname{sign}(x)} \\
&= \frac{c}{|x|}+\frac{1}{x}\int x^2dx \\
&= \frac{c}{|x|}+\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3} \\
&= \frac{c}{|x|}+\frac{x^2}{3}
\end{aligned}
$$

2. נציב $y(1)=5$:

$$\begin{aligned}\frac{c}{1}+\frac{1^2}{3} &= 5\\ c+\frac{1}{3} &= 5\\ c &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y=\frac{14}{3x}+\frac{x^2}{3}$$

משוואת ברנולי

משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה:

$$y^{'}+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n$$

עבור $n\neq 0,1$.
אם $n>0$ אז $y(x)=0$ הוא פתרון (פרטי או סינגולרי).
אם $n<0$ אז $y(x)=0$ לא פתרון.
כאשר $y\neq 0$ (זהותית) המשוואה שקולה למשוואה:

$$\frac{y^{'}}{y^n}+p(x)\cdot y^{1-n}=q(x)$$

נציב $z=y^{1-n}$.
$z^{'}=(1-n)\,y^{-n}\cdot y^{'}=\frac{(1-n)y^{'}}{y^n}$.
נציב במשוואה ונקבל:

$$\frac{z^{'}}{1-n}+p(x)\cdot z=q(x)$$

זו משוואה לינארית לא הומוגנית. ניתן להציב שוב בנוסחה שמצאנו מקודם:

$$z(x)=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\cdot\left[c+\int(1-n)\,q(x)\,e^{\int(1-n)p(x)dx}\right]$$

נציב בהגדרת z ונקבל:

$$y(x)=\left\{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\cdot\left[c+\int(1-n)\,q(x)\,e^{\int(1-n)p(x)dx}\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

הערה

עבור $0<n<1$, $y=0$ הוא פתרון מיוחד (סינגולרי).
עבור $n>1$, $y=0$ פתרון פרטי.
עבור $n<0$, $y=0$ לא פתרון.

דוגמה

$$y^{'}-2xy=2x^3y^2$$

$.p\left(x\right)=-2x,\,q\left(x\right)=2x^3,\,n=2$

$$\begin{aligned}
y\left(x\right) &= \left\{e^{-\int 2xdx}\cdot\left[c+\int 2x^3e^{\int 2xdx}dx\right]\right\}^{-1}\\
&= \left\{e^{-x^2}\cdot\left[c+\int 2x^3e^{x^2}dx\right]\right\}^{-1}\\
u &= x^2\\
du &= 2xdx\\
y\left(x\right) &= \left\{e^{-x^2}\cdot\left[c+\int ue^{u}du\right]\right\}^{-1}\\
&= \left\{e^{-x^2}\cdot\left[c+ue^{u}-e^{u}\right]\right\}\\
&= \left\{e^{-x^2}\cdot\left[c-x^2e^{x^2}+e^{x^2}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{ce^{-x^2}-x^2+1}
\end{aligned}$$

מד"ר מדויקות

מד"ר מהצורה:

$$P\left(x,\,y\right)dx+Q\left(x,\,y\right)dy=0$$

כאשר $.\left(x,\,y\right)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$
נניח קיימת $u\left(x,\,y\right)$ המקיימת $\frac{\partial u}{\partial x}=P\left(x,\,y\right)$ ו$\frac{\partial u}{\partial y}=Q\left(x,\,y\right)$ אזי המשוואה היא:

$$du=0$$

לכן u קבועה.
אם קיימת u אזי חייב להתקיים:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

וכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

לכן:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

דוגמה

$$\left(3x^{2}+6xy^{2}\right)dx+\left(6x^{2}y+4y^{3}\right)dy=0$$

נמצא u כזו לפי הנגזרת לפי x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^{2}+6xy^{2}\\ u &= \int\left(3x^{2}+6xy^{2}\right)dx+c\left(y\right)\\ &= x^{3}+3x^{2}y^{2}+\varphi\left(y\right)\end{aligned}$$

נמצא את $\varphi\left(y\right)$ לפי נגזרת לפי y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^{2}y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

אבל לפי המשוואה המקורית אנו יודעים:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^{2}y+4y^{3}$$

לכן

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 4y^{3}\\ \varphi &= y^{4}+c\end{aligned}$$

לכן סה"כ:

$$u=x^{3}+3x^{2}y^{2}+y^{4}+c$$

אנו יודעים שu קבוע לכן פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא

$$x^{3}+3x^{2}y^{2}+y^{4}=c$$

גורם אינטגרציה (הפיכת מד"ר לא מדויקת למדויקת)

נניח שיש לנו משוואה מהצורה:

$$P\left(x,\,y\right)dx+Q\left(x,\,y\right)dy=0$$

נכפיל את שני הצדדים ב$\mu\left(x,\,y\right)$:

$$\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)+\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)=0$$

נקצה למצוא את הμ המתאימה כך שהמד"ר הזו תהיה מדויקת, כלומר מקיימת:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(x,\,y\right)Q\left(x,\,y\right)\right)$$

נגזור לפי כלל המכפלה ונקבל:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot P+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\mu &= \frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\mu\\ \frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot P-\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot Q &= \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

נאמר שμ הוא גורם אינטגרציה אם הוא מקיים את המשוואה הנ"ל.
שימו לב שהפכנו את הבעיה מפתירת מד"ר לפתירת מד"ח (צריך למצוא את μ), ואנו לא יודעים לעשות זאת, אך במקרים מסוימים נוכל למצוא את גורם האינטגרציה.

מקרה 1

כאשר $\mu=\mu\left(x\right)$.
במקרה כזה מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{d\mu}{dx}\end{aligned}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned}-\frac{d\mu}{dx}\cdot Q &= \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ \frac{d\mu}{\mu} &= -\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}\right)dx\end{aligned}$$

התנאי למקרה הזה הוא אם $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$ תלוי בx בלבד.
הפתרון הוא

$$\mu=e^{-\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}dx}$$

מקרה 2

כאשר $\mu=\mu\left(y\right)$.
התנאי הוא שהביטוי $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}$ תלוי בy בלבד.
הפתרון הוא:

$$\mu\left(y\right)=e^{\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{1}{P}dy}$$

דוגמה

פתור את המד"ר:

$$\left(1-x^{2}y\right)dx+x^{2}\left(y-x\right)dy=0$$

זו אינה מד"ר מדויקת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= -x^{2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy-3x^{2}\end{aligned}$$

נבדוק כל אחד מהמקרים.
מקרה 2:

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{2xy-2x^{2}}{1-x^{2}y}$$

זה לא מצטמצם, הביטוי תלוי בx וy ולכן μאינה פונק' של y בלבד.
ננסה את מקרה 1:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} &= \frac{2x^{2}-2xy}{x^{2}\left(y-x\right)}\\ &= \frac{-2x\left(y-x\right)}{x^{2}\left(y-x\right)}\\ &= -\frac{2}{x}\end{aligned}$$

זה תלוי בx בלבד ולכן μ פונק' של x בלבד.
נציב:

$$\begin{aligned}\mu\left(x\right) &= e^{\int-\frac{2}{x}dx}\\ &= e^{-2\ln|x|}\\ &= \frac{1}{x^{2}}\end{aligned}$$

כעת ניתן להכפיל את כל המשוואה ב$\frac{1}{x^{2}}$ ולפתור כמשוואה מדויקת.

מד"ר מסדר גבוה

$$y^{(n)}=f\left(x,\,y,\,y^{'},\,...,\,y^{(n-1)}\right)$$

לדוגמה, מד"ר מסדר 2 נראה כך:

$$y^{''}=f\left(x,\,y,\,y^{'}\right)$$

אנו מחפשים פתרון מהצורה $y=\varphi\left(x,\,c_{1},\,c_{2}\right)$.

בעיית קושי

בעית קושי היא מד"ר מסדר שני, ושני תנאי התחלה $y\left(x_{0}\right)=y_{0}$, $y^{'}\left(x_{0}\right)=y_{0}^{'}$.

נתבונן במספר סוגים של מד"ר מסדר גבוה שניתן לפתור בעזרת מד"ר מסדר 1.

סוג 1

מד"ר מהצורה:

$$y^{(n)} = f(x)$$

נפתור ע"י אינטגרציה חוזרת:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x)\,dx + c_1 \\ y^{(n-2)} &= \int \left[\int f(x)\,dx\right] dx + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

וכך הלאה עד y.

סוג 2 - הורדת סדר משוואה

בסוג זה יש 2 מקרים:

1. y לא מופיע במשוואה. משוואה מהצורה:

$$y'' = f\left(x,\, y'\right)$$

מסמנים $z = y'$.
$z' = f(x,\, z)$.
פותרים עבור $z(x)$ ומציבים $y = \int z(x)\,dx + c$.
<u>דוגמה:</u>
המשוואה:

$$y'' = xy'$$

נציב $z = y'$, $z' = xz$.

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z} &= x \\ \ln|z| &= \frac{x^2}{2} \\ z &= c_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \\ y &= c_1 \int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2 \end{aligned}$$

2. כאשר x לא מופיע. מד"ר מהצורה:

$$y'' = f\left(y,\, y'\right)$$

נגדיר $p = y'$.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

נציב במשוואה:

$$\frac{dp}{dy}\cdot p=f\left(y,\,p\right)$$

זו משוואה מסדר ראשון, נפתור עבור $p\left(y\right)$ ואז פותרים את המשוואה $y^{'}=p\left(y\right)$ ע"י:

$$\int\frac{dy}{p\left(y\right)}=\int dx=x+c$$

<u>דוגמה:</u>
פתור את המשוואה

$$\begin{aligned}
y\cdot y^{''}-2\left(y^{'}\right)^{2} &= 0\\
y^{'} &= p\\
y^{''} &= p_{y}^{'}\cdot p\\
y\cdot p_{y}^{'}\cdot p-2p^{2} &= 0\\
\frac{p_{y}^{'}}{p} &= \frac{2}{y}\\
\int\frac{dp}{p} &= 2\int\frac{dy}{y}\\
\ln\left|p\right| &= 2\ln\left|y\right|+c\\
p &= cy^{2}
\end{aligned}$$

כעת נפתור עבור y:

$$\begin{aligned}
y^{'} &= c_{1}y^{2}\\
\frac{y^{'}}{y^{2}} &= c_{1}\\
\int\frac{dy}{y^{2}} &= \int c_{1}dx\\
-\frac{1}{y} &= c_{1}x+c_{2}\\
y &= -\frac{1}{c_{1}x+c_{2}}
\end{aligned}$$

משוואת ריקטי

משוואת ריקטי היא מד"ר מהצורה

$$y^{'}+f\left(x\right)y^{2}+g\left(x\right)y+h\left(x\right)$$

טענה

פתרון כללי של משוואת ריקטי הוא מהצורה

$$y\left(x\right)=\frac{c\cdot a\left(x\right)+b\left(x\right)}{c\cdot A\left(x\right)+B\left(x\right)}$$

ולכל ביטוי מהצורה הנ"ל קיימת משוואת ריקטי.

הוכחה

1. כיוון ראשון:
נתון פתרון מהצורה הנ"ל אזי מתקיים

$$y\left(x\right)\left[cA\left(x\right)+B\left(x\right)\right]=ca\left(x\right)+b\left(x\right)$$

נפתח סוגריים ונסדר:

$$c\left(yA-a\right)-b+yB=0$$

נגזור את המשוואה ונקבל:

$$c\left[y^{'}A+A^{'}y-a^{'}\right]-b^{'}+\left(y^{'}B+B^{'}y\right)=0$$

קיים פתרון $\Longleftrightarrow$ הדטרמיננטה $\begin{vmatrix}y^{'}A+A^{'}y-a^{'} & -b^{'}+y^{'}B+B^{'}y\\ yA-a & -b+yB\end{vmatrix}=0$

נפתח את הדטרמיננטה ונקבל:

$$y^{'}+y^{2}\cdot\frac{AB^{'}-B^{'}a}{Ab-aB}+y\cdot\frac{a^{'}B-A^{'}B-Ab^{'}-aB^{'}}{bA-aB}+\frac{ab^{'}-a^{'}b}{bA-aB}=0$$

וזו משוואת ריקטי, קיבלנו שקיימת משוואת ריקטי עבור כל ביטוי מהצורה שבטענה.

2. כיוון שני:
תהי $y_{p}\left(x\right)$ פתרון פרטי של משוואת ריקטי.
נציב $y\left(x\right)=y_{p}\left(x\right)+z\left(x\right)$:

$$z^{'}+y_{p}^{'}+f\left(x\right)\cdot\left(z^{2}+2zy_{p}+y_{p}^{2}\right)+g\left(x\right)\cdot\left(y_{p}+z\right)+h\left(x\right)=0$$

כיוון שy_{p} גם פתרון של המשוואה, ידוע שמתקיים

$$y_{p}^{'}+f\left(x\right)\cdot y_{p}^{2}+g\left(x\right)\cdot y_{p}+h\left(x\right)=0$$

לכן נצמצם את זה מהמשוואה הראשונה ונקבל

$$z^{'}+f\left(x\right)\left(z^{2}+2zy_{p}\right)+g\left(x\right)z=0$$

זו משוואת ברנולי עם $n=2$. הפתרון הוא:

$$z=\frac{1}{c\alpha\left(x\right)+\beta\left(x\right)}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{aligned}y & = y_{p}+z\\ & = \frac{cy_{p}\alpha\left(x\right)+y_{p}\cdot\beta\left(x\right)+1}{c\alpha\left(x\right)+\beta\left(x\right)}\end{aligned}$$