אינטגרל של פונקציה רציונאלית והצבה טריגונומטרית

הגדרה פונקציה רציונאלית היא ~~...~~ פונקציה מהצורה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר P,Q הם פולינומים.

משפט כל פולינום מעל $\mathbb{R}$ מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים ממעלה 1 או 2.

אלגוריתם לחישוב של פונקציה רציונאלית

בהינתן $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ נחשב את האינטגרל בשלבים הבאים:

שלב 1 נפצל פירוק לשברים חלקיים של $\frac{P(x)}{Q(x)}$ בדרך הבאה:

א) דואגים ונוודא שהמעלה של P קטנה ממש מהמעלה של Q, כלומר נוודא האם $\deg P > \deg Q$.
אם כן, נחלק את P ב-Q חילוק ארוך.
אם לא, אז נמשיך לשלב הבא.

ב) נפרק את המכנה $Q(x)$ לגורמים אי פריקים ונקבל כללית:

$$Q(x)=k\left(x+a_1\right)^{\alpha_1}\left(x+a_2\right)^{\alpha_2}\cdots\left(x+a_n\right)^{\alpha_n}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}\cdots\left(x^2+b_mx+c_m\right)^{\beta_m}$$

ג) נכתוב את $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כסכום של שברים חלקיים

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=k\Bigg(\frac{A_{1,1}}{(x+a_1)}+\dots+\frac{A_{1,\alpha_1}}{(x+a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{2,1}}{(x+a_2)}+\frac{A_{2,2}}{(x+a_2)^2}+\dots+\frac{A_{2,\alpha_2}}{(x+a_2)^{\alpha_2}}+\dots$$

$$\dots+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\dots+\frac{B_{1,\beta_1}x+C_{1,\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+\dots$$

$$\dots+\frac{B_{m,1}x+C_{m,1}}{(x^2+b_mx+c_m)}+\dots+\frac{B_{m,\beta_m}x+C_{m,\beta_m}}{(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}\Bigg)$$

הערה: עבור גורם $(x+a_i)^{d_i}$ ה- שבר חלקי
עבור כל חזקה מ-1 עד d_1. כלומר אם הגורם
הוא מחזקה d_1 אז עבור $(x+a_i)^{d_i}$ יהיו d_i
שברים חלקיים.

3) נמצא את המקדמים A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}

שלב ב': נחשב את האינטגרל של כל אחד
מ-השברים החלקיים

דוגמא 1 (איך אינטגרל נראה):

$$\int \frac{x}{x^2-4x+8}$$

דואגים לנסות האם המונה של המכנה נגזרת של המונה
של המכנה. במקרה שלנו לא מדויק ולכן
(ממשיך לפתור כך:)
ברור שהמכנה אי פריק ($b^2-4ac<0$)
ולכן זה כבר שבר חלקי.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4+4}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+\int\frac{4}{x^2-4x+8}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dt}{t}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}\right]=\frac{1}{2}\left[\ln|t|+\int\frac{dx}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}\right]=$$

$t=x^2-4x+8$
$dt=(2x-4)dx$

השלמה לריבוע של המכנה

הצבה
$t=\frac{x-2}{2}$
$2dt=dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-4x+8\right)+2\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]+C$$

Scanned by CamScanner

<u>תרגיל:</u> חשבו את $\int \frac{x^4}{1-x^3}dx$

<u>פתרון:</u> המעלה של המונה יותר גדולה מהמעלה של המכנה
ולכן נחלק את x^4 ב $1-x^3$ חילוק ארוך:

$$\begin{array}{r|l} -x & \\ \hline x^4 & 1-x^3 \\ -\;x^4-x & \\ \hline x & \end{array} \Rightarrow \frac{x^4}{1-x^3}=\frac{-x(1-x^3)+x}{1-x^3}=-x+\frac{x}{1-x^3}$$

$$\int -x\,dx=-\frac{x^2}{2}$$

נחשב את $\int \frac{x}{1-x^3}dx$:

נשים לב שהמכנה פריק:

$$1-x^3=(1-x)(x^2+x+1)$$

נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{x}{1-x^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

נכפול מכנה משותף ונקבל:

$$x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(1-x)$$

נציב $x=1$: $\quad 1=3A \Rightarrow A=\frac{1}{3}$

נציב $x=0$: $\quad 0=\frac{1}{3}+C \Rightarrow C=-\frac{1}{3}$

נציב $x=-1$: $\quad B=\frac{1}{3}$

לכן נחשב את האינטגרל

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

בנפרד: $\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-x}dx=-\frac{1}{3}\ln|1-x|+C$

והמשך:

$$\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-3\int\frac{dx}{x^2+x+1}\right]=$$

$\Downarrow$

$t=x^2+x+1$

$dt=(2x+1)dx$

$\Downarrow$

השלמה לריבוע

של המכנה:

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\ln|t|-4\int\frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\right]=$$

$\Downarrow$

הצבה

$$t=\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}dt=dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{4\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]+C$$

תשובה סופית:

$$-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\ln|1-x|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

הצבות טריגונומטריות

אם באינטגרל מופיע אחד מהביטויים הבאים:

$\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$

א) אם מופיע $\sqrt{a^2-x^2}$ נציב $x=a\sin(\theta)$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ב) אם מופיע $\sqrt{a^2+x^2}$ נציב $x=a\tan(\theta)$ $\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

ג) אם מופיע $\sqrt{x^2-a^2}$ נציב $x=\frac{a}{\cos\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

<u>דוגמה:</u>

נחשב

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

<u>פתרון</u> נציב $x=2\sin(\theta)$ $\quad dx=2\cos(\theta)d\theta$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos(\theta)\,d\theta}{(2\sin(\theta))^2\sqrt{4-4\sin^2(\theta)}}=\int\frac{2\cos(\theta)\,d\theta}{(2\sin(\theta))^2(2\cos(\theta))}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\sin^2(\theta)}=-\frac{1}{4}\cot(\theta)+C$$

נחזור למשתנה x:

$$\sin(\theta)=\frac{x}{2}\Rightarrow\sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)=\frac{x^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^2(\theta)=\frac{4-x^2}{4}\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

ולכן

$$-\frac{1}{4}\cot(\theta)+C=-\frac{1}{4}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\,\frac{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{x}{2}}+C=-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C$$

דוגמא:

נחשב

$a>0 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

נשתמש ב-הצבה: $x = a\tan(\theta)$

$dx = \frac{a\, d\theta}{\sin^2(\theta)}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2(\theta)+a^2}} \cdot \frac{a\, d\theta}{\sin^2(\theta)} =$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{a}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}} \frac{\cancel{a}\, d\theta}{\sin^2(\theta)} = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta =$$

תזכורת

כלל:

$\boxed{\tan^2(x)+1 = \frac{1}{\cos^2(x)}}$

$t = \sin(\theta)$

$dt = \cos(\theta) d\theta$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin(\theta)} + C$$

נחזור למשתנה x:

$$\tan^2(\theta) = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \tan^2(x)+1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{x^2+a^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta) = \frac{a^2}{x^2+a^2} = 1-\sin^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \frac{a^2}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \cancel{\cos(\theta) \neq a}$$

לכן הכל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C$$

[illegible] וחשב את

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$$

פתרון

$$dx = \frac{5}{\cos(\theta)}\cdot \tan(\theta)\,d\theta \qquad x = \frac{5}{\cos(\theta)}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{25}{\cos^2(\theta)}-25}}{\frac{5}{\cos^2(\theta)}}\cancel{dx}\cdot\left(\frac{5}{\cos(\theta)}\cdot\tan(\theta)\right)d\theta =$$

$$= \int \frac{5\tan(\theta)}{\frac{5}{\cos(\theta)}}\left(\frac{5}{\cos(\theta)}\cdot\tan(\theta)\right)d\theta = 5\int \tan^2(\theta)\,d\theta =$$

$$= 5\int\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}-1\right)d\theta = 5\tan(\theta) - 5\theta + C$$

(חזור למשתנה x:

$$\tan^2(\theta)+1 = \frac{\cancel{25}\,1}{\cos^2(\theta)} = \frac{x^2}{25}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan^2(\theta) = \frac{x^2}{25}-1 = \frac{x^2-25}{25}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{x}\right)$$

ולכן – פתרון הוא:

$$\sqrt{x^2-25} - 5\arccos\left(\frac{5}{x}\right) + C$$

ב-(א) $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx \qquad m,n\in\mathbb{Z}$

(א) כאשר m,n שלמים ולפחות אחד מהם אי
זוגי:

אם n אי זוגי (נציב $t=\sin(x)$)

אם m אי זוגי (נציב $t=\cos(x)$)

דוגמה:

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \sin^0(x)\cdot\cos^{-1}(x)\,dx$$

(נציב $t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx$) ונשתמש בטריק הבא:

$$\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)\,dx}{1-\sin^2(x)} = \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

מסכים על פירוק-
כבר ראינו כאשר
תרגלנו פרק

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{1-t} + \int \frac{1}{1+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right| + C$$

(ב) כאשר m,n זוגיים, (דהיינו אחד מהם -חיובי
אם m,n טבעיים נשתמש בזהויות:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$2\sin^2(x) = 1-\cos(2x)$$

$$2\cos^2(x) = 1+\cos(2x)$$

דוגמה: נחשב את:

$$\int \sin^4(x)\cos^4(x)\,dx = \frac{1}{16}\int (\sin(2x))^4 = \frac{1}{16}\int (\sin^2(2x))^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)^2 dx =$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{16}\int\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{4}\cos^2(4x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}x-\frac{\sin(4x)}{8}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(8x)\right)dx\right]=$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}x-\frac{\sin(4x)}{8}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin(8x)}{16}\right]\right]+C$$

הצבה אוניברסלית

1) הצבה אוניברסלית טריגונומטרית:

מה זו פונקציה רציונאלית ב $\sin(x), \cos(x)$

מסומן: $R(\sin(x),\cos(x))$ (למשל: $\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2\cos(x)+\sin(x)+1}$)

נחשב את האינטגרל $\int R(\sin(x),\cos(x))$

נבצע הצבה הבאה: $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמה: נחשב את

$$\int\frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)+3}$$

הערה: לקחנו אינטגרל של $R(\sin(x),\cos(x))$ לאינטגרל של פונקציה רציונאלית

$$\int\frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)+3}=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$= \int \frac{2dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2+4t+2} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} =$$

$$= \arctan(t+1) + C = \arctan\left(1+\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + C$$

2) הצבה אוילר

אם נתון ביטוי עם $\sqrt{ax^2+bx+c}$

כאשר ax^2+bx+c פריק, כלומר

$$ax^2+bx+c = (k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)$$

נציב:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)} = (k_1x-\alpha)t$$

(נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל;

$$(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta) = (k_1x-\alpha)^2t^2$$

$$\Downarrow$$

$$(k_2x-\beta) = (k_1x-\alpha)t^2$$

(כאן סידורים ונבודד את x:

$$x = \frac{\alpha t^2-\beta}{k_1t^2-k_2}$$

דוגמא:

נחשב את

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$$

$x^2+x-2 = (x-1)(x-2)$ פריק

ולכן נציב

$$\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{(x-1)(x-2)} = (x-1)t$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2) = (x-1)t^2$$

נבודד את x ונקבל:

$$x = \frac{t^2+2}{t^2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = -6\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

כמו כן:

$$(x-1)t=\left(\frac{t^2+2}{t^2-1}-1\right)t=\frac{3t}{t^2-1}$$

נציב כמקודם ונקבל.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}=\int\frac{t^2-1}{t^2+2}\cdot\frac{t^2-1}{3t}\cdot\frac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt=$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2+2}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

נחזיר את t ונקבל:

$$t=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{(x-1)}=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}=-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-2}}\right)+C$$