

חקב"צ - תרגול 6

8 בדצמבר 2011

תרגיל

פתור את בעיית התכנון הלינארי הבאה, כאשר x_1 אינו מוגבל בסימן:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & : 6x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

נציב

$$x_1 = x_{11} - x_{12}$$

כאשר

$$x_{11}, x_{12} \geq 0$$

נציב בבעיה:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_{11} - 2x_{12} - 3x_2 \\ \text{s.t.} & : 6x_{11} - 6x_{12} + 3x_2 + s_1 = 12 \\ & -x_{11} + x_{12} + 3x_2 + s_2 = 7 \\ & x_{11}, x_{12}, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

נעשה סימפלקס:

איטרציה	בסיס	z	x_{11}	x_{12}	x_2	s_1	s_2	RHS
0	z	1	-2	2	3	0	0	0
	s_1	0	6	-6	3	1	0	12
	s_2	0	-1	1	3	0	1	7
1	z	1	0	0	4	$\frac{1}{3}$	0	4
	x_{11}	0	1	-1	0.5	$\frac{1}{6}$	0	2
	s_2	0	0	0	3.5	$\frac{1}{6}$	1	9

קיבלנו שהפתרון האופטימלי הוא

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} - x_{12} = 2 - 0 = 2 \\ x_2 &= 0 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

דואליות

הבעיה הפרימלית היא

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} &: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לה היא:

$$\begin{aligned} \min w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} &: \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

אפשר לכתוב בצורה מטריצאלית. הבעיה הפרימלית:

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} &: Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

כאשר x, b, c וקטורים ו A מטריצת מקדמים.
הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min w &= yb \\ \text{s.t.} &: yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

תרגיל

נתונה בעיית תכנון לינארי:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} &: 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

1. נסח את הבעיה הדואלית.

2. פתור את הבעיה הפרימלית בסימפלקס.

3. בעזרת הפתרון של הבעיה הפרימלית מצא את הפתרון לבעיה הדואלית.

פתרון

הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min w &= 20y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t.} &: 2y_1 + y_2 \geq 5 \\ & 5y_1 + 3y_2 \geq 7 \\ & y_2 \geq 4 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

נפתור את הפרימלית עם סימפלקס:

איטרציה	בסיס	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
0	z	1	-5	-7	-4	0	0	0
	s_1	0	2	5	0	1	0	20
	s_2	0	1	3	1	0	1	12
אחרונה (לא עשינו את שאר האיטרציות)	z	1	0	7.5	0	0.5	4	58
	x_1	0	1	2.5	0	0.5	0	10
	x_3	0	0	0.5	1	-0.5	1	2

אז הפתרון הוא

$$x_1 = 10, x_3 = 2, x_2 = 0, z = 58 = w$$

הפתרון של הדואלית הוא:

$$y_1 = 0.5, y_2 = 4, w = 58$$

נשים לב ש y_1, y_2 הם בעצם מקדמי s_1, s_2 באיטרציה האחרונה של הסימפלקס.