פתרון תרגיל 12 – מבוא לאנליזה 1

1. (א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$: נסמן $f(x)=\ln x,\ g(x)=\sqrt{x}$. אז $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, f ו־g גזירות לכל $x>0$ ו־$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\neq 0$ שם. בנוסף, קיים הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

לכן אפשר להשתמש בכלל לופיטל ולקבל $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$ כלומר $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$.

הערה: מטעמי נוחות, את שאר הפתרונות בתרגיל זה ניתן בצורה מקוצרת, למשל בשאלה זו:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

ודאו שאתם מבינים שהתנאים הדרושים אכן מתקיימים ויודעים לכתוב את ההצדקה בצורה מלאה.

(ב) כאן צריך להשתמש בכלל לופיטל פעמיים (בפעם השנייה על מנת להוכיח שגבול הנגזרות אכן קיים):

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

(ג)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

(ד)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

כאן נעזרנו בתוצאה מסעיף (ג), אפשר היה גם להשתמש בכלל לופיטל פעם נוספת.

2. (א) בעזרת כלל לופיטל, הראו כי $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

(ב) בעזרת הסעיף הקודם, הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}(e^{\ln x})^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x}=e^0=1$$