27.11.2011

פתרון תרגיל 5 – אינפי 1

1. חשבו את גבול הסדרות:

א. $a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$

פתרון:

$$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(\frac{n^2-3}{n^2-3}+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-12+11}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4(n^2-3)}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^{4}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$$

כעת, $\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$ זה כפל של 11 (מספר קבוע) פעמים של סדרה ששואפת לאחד, ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות שואף לאחד.

$\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^{4}$ זה כפל של 4 פעמים סדרה ששואפת ל e ולכן שואף ל e^4.

סה"כ, $a_n\to e^4$

ב. $a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון:

$$a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{6\left(\frac{2n^3+3}{4}\right)-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left(1-\frac{1}{\frac{2n^3+3}{4}}\right)^{\frac{2n^3+3}{4}}\right)^{6}\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\to\left(e^{-1}\right)^{6}\cdot 1=e^{-6}$$

ג. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4}}{n}$

פתרון:
נחלק את המונה והמכנה ב- n (שימו לב שכאשר n נכנס לשורש, הוא הופך ל- n^2).
נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}{1} = \sqrt{1+0}+\sqrt{1-0} = 2$$

2. מצאו את כל הגבולות החלקיים וציינו $\underline{\lim}, \overline{\lim}$. כמו כן, קבעו אם הסדרה a_n
מתכנסת: $a_n = \frac{4^n+(-4)^n}{5^n}$.

פתרון:
נתבונן בשתי תתי הסדרות הבאות:

<u>סדרת המקומות הזוגיים</u>
$a_{2n} = \frac{4^{2n}+4^{2n}}{5^{2n}} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$; וקל לראות שהסדרה שואפת לאפס.
<u>סדרת המקומות האיזוגיים</u>
$a_{2n-1} = \frac{4^{2n-1}-4^{2n-1}}{5^{2n-1}} = 0$; והסדרה הזאת שואפת לאפס.

כלומר, בינתיים יש לנו גבול חלקי אחד, שהוא אפס.
נוכיח שזהו הגבול החלקי היחיד. בעיקרון יש כמה שיטות לעשות זאת. ראינו את אחת השיטות בכיתה:
לפי משפט האפיון על מנת ש- L יהיה גבול חלקי, צריך שבכל סביבה של L יהיו אינסוף איברי סדרה. אז על מנת להראות ש- L הוא לא גבול חלקי – מספיק למצוא סביבה אחת כזו שבה אין מספר אינסופי של איברים.
זו אכן שיטה נחמדה, ואתם מוזמנים לנסות אותה בבית.
אנחנו נעשה משהו קצת שונה. נוכיח שהסדרה כולה מתכנסת ל-אפס. לאחר מכן ניזכר במשפט הבא:
אם סדרה מתכנסת לגבול L אזי כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול L.
אצלנו: נראה שהסדרה המקורית מתכנסת לאפס, ולכן לא יהיו לה גבולות חלקיים פרט לאפס.

נתחיל?

אז מה אנחנו יודעים עד כה? במקומות האי-זוגיים יש לנו אפסים. במקומות הזוגיים יש לנו סדרה מתכנסת לאפס. נסמן אותה ב- $\{a_k\}$. מה זה אומר שהיא מתכנסת לאפס? זה אומר ש:
(*) לכל $\varepsilon>0$ קיים k_0 כך שלכל $k>k_0$ מתקיים $|a_k-0|<\varepsilon$ או $a_k<\varepsilon$ (שכן זאת סדרה של מספרים חיוביים).

כעת, מה אנחנו רוצים? רוצים להראות את הדבר הבא אודות הסדרה המקורית:
לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$ או למעשה $a_n<\varepsilon$.
או.קיי. יהי $\varepsilon>0$. איזה n_0 כדאי לבחור? אולי $n_0=2k_0$? נראה אם זה עוזר:
לכל $n>n_0$ יש שתי אפשרויות:

א. אם n אי זוגי, אזי $a_n=0$ ואז ברור ש- $a_n<\varepsilon$
ב. אם n זוגי, אזי קיים k כך ש- $n=2k$. כעת, בגלל ש- $n>n_0$ נקבל ש- $2k>2k_0$, כלומר $k>k_0$. ומה זה אומר? זה אומר לפי (*) ש- $a_n=a_{2k}<\varepsilon$.
וזה בדיוק מה שהיה צריך להראות.

לסיכום, הוכחנו שהסדרה המקורית מתכנסת לאפס, ולכן אפס הוא הגבול החלקי היחיד שלה.

3. הוכיחו: $\overline{\lim}a_n=-\underline{\lim}(-a_n)$.

פתרון:
נפתור באמצעות סדרות.
נוכיח אי שוויון בשני הכיוונים.

<u>הכיוון הראשון:</u> $\overline{\lim}a_n\le-\underline{\lim}(-a_n)$.
לפי הגדרת הגבול העליון קיימת תת סדרה של $\{a_n\}$ המקיימת: $a_{n_k}\to\overline{\lim}a_n$.
נכפיל במינוס אחד (מדוע מותר לעשות זאת? אריתמטיקה של גבולות... ☺) ונקבל: $-a_{n_k}\to-\overline{\lim}a_n$. מכיוון ש- $\{-a_{n_k}\}$ היא תת סדרה של $\{-a_n\}$, מקבלים ש- $\left(-\overline{\lim}a_n\right)$ הוא גבול חלקי של סדרה זו. מכיוון ש- $\underline{\lim}\left(-a_n\right)$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר, נקבל $\underline{\lim}\left(-a_n\right)\le-\overline{\lim}a_n$. נכפיל את שני האגפים ב- $\left(-1\right)$ ונקבל: $-\underline{\lim}\left(-a_n\right)\ge\overline{\lim}a_n$, כדרוש (בכיוון הזה).

<u>הכיוון השני:</u> $\overline{\lim}a_n\ge-\underline{\lim}(-a_n)$
לפי הגדרת גבול תחתון (הפעם לגבי הסדרה $\{-a_n\}$) קיימת תת סדרה המקיימת: $-a_{n_k}\to\underline{\lim}\left(-a_n\right)$. שוב, זה שקול ל- $a_{n_k}\to-\underline{\lim}\left(-a_n\right)$. בנוסף, $\overline{\lim}a_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של $\{a_n\}$ ולכן $-\underline{\lim}\left(a_n\right)\le\overline{\lim}a_n$ ולכן $\underline{\lim}a_n\le-\overline{\lim}\left(-a_n\right)$. כאן סיימנו את הוכחת הכיוון השני, ולכן גם את הוכחת כל התרגיל.

[ושמישהו יגיד עכשיו שזה לא מספיק מפורט!!! ☺]

4. הוכיחו שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

פתרון:

$\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של b_n לכן קיימת תת סדרה $\{b_{n_k}\}$ כך ש $b_{n_k}\to\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$. $\{a_n\}$ מתכנסת, נגיד לגבול L , לכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לגבול L ולכן $a_{n_k}\to L$ ו $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=L$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ כלומר זה גבול חלקי של הסדרה a_n+b_n. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה a_n+b_n, ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$.

בכיוון ההפוך, קיימת תת סדרה של a_n+b_n, שהיא $a_{n_k}+b_{n_k}$ כך ש $\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$. שוב, $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן גם כל תת סדרה שלה מתכנסת ולכן $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ ולפי אריתמיטקה של גבולות, $\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\left(b_{n_k}+a_{n_k}-a_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)-\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim b_{n_k}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$.

לסיום, אם $a\le b$ וגם $b\le a$ אזי $a=b$, במקרה שלנו קיבלנו $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

5. א. יהי $0\le p<1$ ותהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n|\le p|a_n-a_{n-1}|$ לכל $n\ge 2$.
הוכיחו שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (רמז: סדרת Cauchy).

ב. תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_n|\le 2$ וגם $|a_{n+1}-a_n|\le\frac{1}{5}\left|a_n^{\,2}-a_{n-1}^{\,2}\right|$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

פתרון:

<u>פתרון סעיף א'</u>

אם $p=0$ הטענה ברורה שכן אז הסדרה קבועה (למה?) ולכן מתכנסת. נניח כעת, ש- $0<p<1$. נוכיח שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת. תחילה נוכיח באינדוקציה טענת עזר : $\forall k\in\mathbb{N} \quad \left|a_{k+1}-a_k\right|\le p^{k-1}\,|a_2-a_1|$.

עבור $k=1$ הטענה נכונה שכן $\left|a_2-a_1\right|=|a_2-a_1|=p^0\,|a_2-a_1|$.

נניח נכונות הטענה ל k ונוכיח ל $k+1$. עפ"י הנתון בשאלה נקבל ש- $\left|a_{k+2}-a_{k+1}\right|\le p\,|a_{k+1}-a_k|$. מהנחת האינדוקציה נקבל ש $\left|a_{k+2}-a_{k+1}\right|\le p\,|a_{k+1}-a_k| \quad \le pp^{k-1}\,|a_2-a_1|=p^k\,|a_2-a_1|$. מש"ל טענת עזר

כעת נעבור להוכחה שהסדרה היא סדרת קושי. אם $m>n$ אז מאי שוויון המשולש ומטענת העזר נקבל ש:

$$\left|a_m-a_n\right|\le\left|a_m-a_{m-1}\right|+\left|a_{m-1}-a_{m-2}\right|+\dots+\left|a_{n+1}-a_n\right|\le$$
$$p^{m-2}\,|a_2-a_1|+p^{m-3}\,|a_2-a_1|+\dots+p^{n-1}\left|a_2-a_1\right|=\left(p^{n-1}+p^n+\dots+p^{m-3}+p^{m-2}\right)|a_2-a_1|$$

ניעזר בסכום סדרה הנדסית:

$$p^{n-1}+p^n+\dots+p^{m-3}+p^{m-2}=\frac{p^{n-1}(1-p^{m-n})}{1-p}=\frac{p^{n-1}-p^{m-1}}{1-p}\le\frac{p^{n-1}}{1-p}$$

לכן $\left|a_m-a_n\right|\le|a_2-a_1|\frac{p^{n-1}}{1-p}$. כעת, $|a_2-a_1|\frac{p^{n-1}}{1-p}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ $|a_2-a_1|\frac{p^{n-1}}{1-p}<\varepsilon$. אם $m>n>n_0$ נקבל מהפיתוח הנ"ל ש $\left|a_m-a_n\right|\le|a_2-a_1|\frac{p^{n-1}}{1-p}<\varepsilon$. לכן הסדרה היא סדרת קושי ועפ"י משפט היא מתכנסת.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

$$\frac{1}{5}\left|a_n^{\,2}-a_{n-1}^{\,2}\right|=\frac{1}{5}\left|a_n-a_{n-1}\right|\left|a_n+a_{n-1}\right|\le\frac{1}{5}\left|a_n-a_{n-1}\right|\left(\left|a_n\right|+\left|a_{n-1}\right|\right)\le$$
$$\le\frac{1}{5}\left|a_n-a_{n-1}\right|(2+2)=\frac{4}{5}\left|a_n-a_{n-1}\right|$$

כפי שהוכחנו בסעיף א', סדרה המקיימת $\left|a_{n+1}-a_n\right|\le p\left|a_n-a_{n-1}\right|$ הינה סדרת קושי ולכן

מתכנסת (עבור $0<p<1$)

6. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right)$ ו-
$a_1=13$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

פתרון:

$$|a_m-a_n|=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-\ldots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n|\le|a_m-a_{m-1}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|=$$

$$\left|(-1)^{m-1}\left[\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\right]\right|+\ldots+\left|(-1)^n\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right]\right|=\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots+1\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}\le\frac{1}{2^n}\to 0$$

לכן זו סדרת קושי ולכן היא מתכנסת (ללא תלות באיבר הראשון כלל)

<u>הערה כללית</u>

כדאי להכיר את המשפט הבא:

תהי $\{a_n\}$ סדרה כלשהי. נניח ש- $\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=M$, $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=L$. אזי הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה $\{a_n\}$ הם L,M.

כעת, שימו לב שתרגילים כמו 2 (בקובץ הנוכחי) נפתרים ממש בקלות ☺ תהנו!

<u>הוכחת המשפט</u>

תהי סדרה חלקית $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל T. נוכיח שבהכרח $T=L$ או $T=M$.

בתוך קבוצת האינדקסים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש בהכרח אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים איזוגיים. אכן, אחרת מספר האינדקסים הזוגיים הוא סופי וכן מספר האינדקסים האי זוגים הוא סופי. אבל אז נקבל שהקבוצה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סופית. מכיון שעפ"י הגדרת תת סדרה כל

האיברים ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ שונים אז ברור שיש בה אינסוף איברים. נמשיך כעת לפי המצבים האפשריים:

א) ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש אינסוף איברים זוגיים. ברור שיש ל $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה $\{n_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ שכל איבריה זוגיים. מתקיים $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = T$. מצד שני ברור ש $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = L$. מיחידות הגבול נקבל ש $T = L$.

ב) ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש אינסוף איברים אי זוגיים. תהליך דומה לסעיף א יוביל למסקנה $T = M$.

מסקנות:

1) מההוכחה קל לראות שאם $L \neq M$ אז כל תת סדרה שבה אינסוף איברים מהמקומות הזוגיים וגם אינסוף איברים מהמקומות האי זוגיים תתבדר. (כי לפי מה שתיארנו קודם היא צריכה להתכנס גם ל L וגם ל M וזה בלתי אפשרי).

2) אם בסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, סדרת הזוגיים מתכנסת לגבול L ו סדרת האי זוגים מתכנסת לגבול M אז לסדרה בדיוק שני גבולות חלקיים אם $L \neq M$. לסדרה גבול חלקי יחיד והיא מתכנסת אם $L = M$.