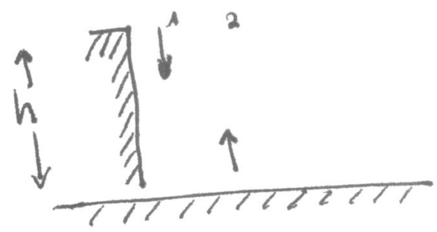
(I)

פיסיקה קלאסית - תרגיל 2

(1)



עבור שלב 1:
(בדרך מטה)

$$\Delta y = y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$y=0;\ y_0=-h \rightarrow \Delta y = -h$$

$$a = -g = -9.8\,\frac{m}{s^2} \approx -10\,\frac{m}{s^2}$$

$$v_0 = 0$$

$$-h = 0 + \frac{1}{2}(-10)\,t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{h}{5}}$$

עבור שלב 2 (בדרך מעלה)

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta y = h - 0 = h$$

$$v_0 = 340\,\frac{m}{s}$$

$$a = 0$$

$$h = 340\,t_2 \rightarrow t_2 = \frac{h}{340}$$

הנתון:

$$t_1 + t_2 = 2.5\,s$$

$$\sqrt{\frac{h}{5}} + \frac{h}{340} = 2.5 \quad / \cdot 340$$

$$h + \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,340 \cdot \sqrt{h} - 2.5(340) = 0$$

$$\sqrt{h} = \frac{-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,340 \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}\,340^2 + 10\cdot 340}}{2} = $$

$$= \frac{-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,340 \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}\,340^2\left(1 - \frac{10\cdot 5}{340}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,340}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{34}}\right) =$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,170\,(-1 \pm 1.071)$$

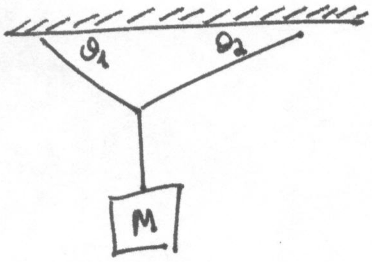
$$\rightarrow \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,170\,(0.071) = 5.39$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\,170\,(-2.071) = -$$ שלילי

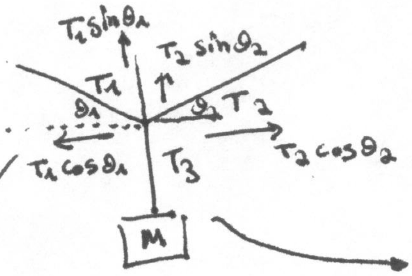
$$\sqrt{h} = 5.39 \rightarrow \boxed{h = 29.14\ m}$$

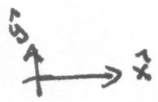
הערה: אם מעלים את הנתון בריבוע ופותחים מקבלים שני פתרונות שרק אחד מספק את הנתון!

(II)



(ב) מסה תלויה ללא תנועה. מה הם המתיחות בחוטים





$\sum F_y = 0$

$T_3 - Mg = 0$

$T_3 = Mg$

y: $T_3 = Mg$

$\sum F_x = 0$

$T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0$

$T_2 = T_1 \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$

$\sum F_y = 0$

$T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - T_3 = 0$

$T_1 \sin\theta_1 + T_1 \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \sin\theta_2 - Mg = 0$

$T_1 \left(\sin\theta_1 + \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \sin\theta_2 \right) = Mg$

$$T_1 = \frac{Mg}{\left(\sin\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \sin\theta_2\right)} = \frac{Mg}{\frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\cos\theta_2}} = \boxed{\frac{Mg \cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$\boxed{T_2 = T_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{Mg \cancel{\cos\theta_2}}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_1}{\cancel{\cos\theta_2}} = \frac{Mg \cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}}$$

(III)

(3) מיקומו של חלקיק במרחב: $\vec{r} = 2(t-3)^2\hat{x} + 4t^2\hat{y}$

א. חשבו את וקטור המהירות והתאוצה והזוית ביניהם.

ב. מהו t עבור המהירות המזערית? מהו וקטור המהירות ברגע זה.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(2(t-3)^2\hat{x} + 4t^2\hat{y}\right) = 4(t-3)\hat{x} + 8t\hat{y}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(4(t-3)\hat{x} + 8t\hat{y}\right) = 4\hat{x} + 8\hat{y}$$

והזוית ביניהם:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}||\vec{a}|\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}||\vec{a}|}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{[4(t-3)]^2 + (8t)^2} = \sqrt{16(t-3)^2 + 64t^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$\frac{(4(t-3), 8t)\cdot(4,8)}{\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}\sqrt{80}} = \cos\theta = \frac{16(t-3)+64t}{\sqrt{80}\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}} = \frac{16t+64t-48}{\sqrt{80}\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}} = \frac{80t-48}{\sqrt{80}\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{80t-48}{\sqrt{80}\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\vec{v}| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}}\left(32(t-3)+128t\right) = \frac{\cancel{2}\left(16t-48+64t\right)}{\cancel{2}\sqrt{16(t-3)^2+64t^2}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$80t-48=0$$

$$\boxed{t = \frac{48}{80} = \frac{8\cdot 6}{8\cdot 10} = \frac{3}{5}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}|\vec{v}|\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[(80t-48)\left(16(t-3)^2+64t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

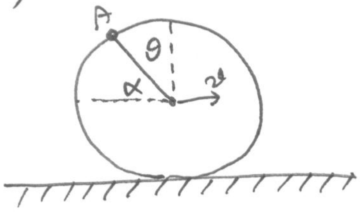
$$= 80\left(16(t-3)^2+64t^2\right)^{-\frac{1}{2}} + (80t-48)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(16(t-3)^2+64t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(32(t-3)+128t\right) =$$

$$= \Big|_{t=\frac{3}{5}} 80\Big(\underbrace{16\left(\tfrac{3}{5}-3\right)^2+64\left(\tfrac{3}{5}\right)^2}_{\text{חיובי}}\Big)^{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(80\tfrac{3}{5}-48\right)}_{=0}\left(-\tfrac{1}{2}\right)(\ldots\ldots)^{-\frac{3}{2}}(\ldots) = \longrightarrow > 0$$

$$\Downarrow$$

נקודה מזערית (נקודת מינימום).

$$\boxed{\vec{v}\Big|_{t=\frac{3}{5}} = 4\left(\tfrac{3}{5}-3\right)\hat{x} + 8\tfrac{3}{5}\hat{y} = 4\,\overbrace{\frac{3-15}{5}}^{-12}\hat{x} + \frac{24}{5}\hat{y} = \underline{-\frac{48}{5}\hat{x} + \frac{24}{5}\hat{y}}}$$



א. נעזר בטרנספורמציה $\alpha = 90 - \theta$

נגדיר את וקטור הסיבוב על ידי α :

$$\vec{r} = R(-\cos\alpha, \sin\alpha)$$

מהירות הסיבוב היא:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v} = R(\dot{\alpha}\sin\alpha, \dot{\alpha}\cos\alpha)$$

ומהירות של הנקודה A היא סכום וקטורי:

$$[v = \dot{\alpha}R] \qquad \vec{v}\Big|_A = \frac{d}{dt}\vec{r} + v\hat{x} = \dot{\alpha}R(\sin\alpha, \cos\alpha) + \dot{\alpha}R(1,0) = \dot{\alpha}R(1+\sin\alpha, \cos\alpha)$$

ב. גודל המהירות היא

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{(\dot{\alpha}R)^2\left((1+\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha\right)} = \dot{\alpha}R\sqrt{1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sqrt{2}\,\dot{\alpha}R\sqrt{1+\sin\alpha}}$$

$$\frac{d}{d\alpha}|\vec{v}| = \sqrt{2}\,\dot{\alpha}R\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}\right) = \sqrt{2}\,\dot{\alpha}R\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sin\alpha}}\cos\alpha = \frac{\dot{\alpha}R}{\sqrt{2}}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$$

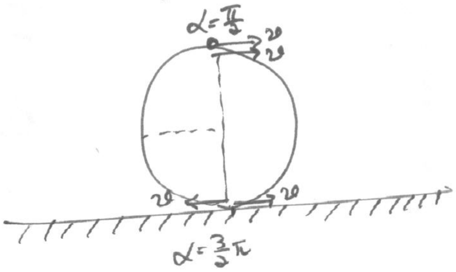
ערכי קיצון $\quad \frac{d}{d\alpha}|\vec{v}| = 0 \longrightarrow \cos\alpha = 0$

$\hookrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ ; \ |\vec{v}|\Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\,\dot{\alpha}R\sqrt{1+1} = 2\dot{\alpha}R \ (=2v)$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \sin\frac{3}{2}\pi = -1 \ ; \ |\vec{v}|\Big|_{\alpha=\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{2}\,\dot{\alpha}R\sqrt{1-1} = 0$$

נסתכל על נקודות הקיצון בציור

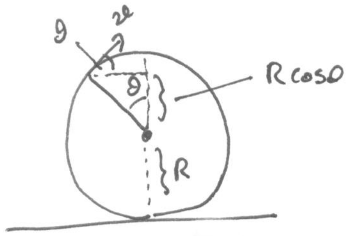


מאחר והמהירות היא חיבור וקטורי של מהירות בכוון $\hat{x}$ ומהירות משיקה (סיבובית) הרי שעבור $\alpha = \frac{\pi}{2}$ המהירויות מתלכדות ועבור $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ המהירויות מבטלות אחת את השנייה.

עכשיו ניתן לקבל את כל הביטויים כפונקציות של θ אם נציב בהצבה $\alpha = 90 - \theta$ (כמובן $\dot{\alpha} = -\dot{\theta}$).

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= -\dot{\theta}R(1+\cos\theta, \sin\theta) \\ |\vec{v}| &= \sqrt{2}\,\dot{\theta}R\sqrt{1+\cos\theta} \end{aligned}}$$

(V)



ג. נסתכל על המקרה הכללי:

$$v = -\dot{\theta}R(1+\cos\theta, \sin\theta)$$

$$H = h + R\cos\theta + R$$

לפי בליסטיקה

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{v_0}{g} \leftarrow \begin{cases} v = v_0 + at \\ a = -g \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \\ v_0 &= v_y = -\dot{\theta}R\sin\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{\dot{\theta}^2R^2}{g}\sin^2\theta + R\cos\theta + R}$$

ד. כדי למצוא את הערך המירבי של H יש לגזור את H לפי θ ולהשוות לאפס, כדי לקבל את ערכי θ הקיצוניים. גזירה שניה של H והצבת נקודות הקיצון יספרו לנו אילו נקודות קיצון אלה.

$$\frac{d}{d\theta}H = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\dot{\theta}^2R^2}{g}\right)\cancel{2}\sin\theta\cos\theta - R\sin\theta = R\sin\theta\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g}\cos\theta - 1\right)$$

נקודות הקיצון הן:

$$\frac{d}{d\theta}H = 0 \longrightarrow \quad \sin\theta = 0 \qquad \frac{\dot{\theta}^2R}{g}\cos\theta = 1$$

$$\downarrow$$

$$* \ \theta = 0 \qquad *** \ \cos\theta = \frac{g}{\dot{\theta}^2R}$$

$$** \ \theta = \pi$$

שימו לב: $g < \dot{\theta}^2R$

$$\downarrow$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{g^2}{\dot{\theta}^4R^2}$$

נחשב את הנגזרת השנית של H:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}H = \frac{d}{d\theta}\left[R\sin\theta\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g}\cos\theta - 1\right)\right] = R\cos\theta\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g}\cos\theta - 1\right) + R\sin\theta\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g}(-\sin\theta)\right) = \rightarrow$$

$$\rightarrow = R\frac{\dot{\theta}^2R}{g}\cos^2\theta - R\cos\theta - R\frac{\dot{\theta}^2R}{g}\sin^2\theta = R\frac{\dot{\theta}^2R}{g}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - R\cos\theta$$

נבדוק את המקרים השונים:

$$* \ \left.\frac{d^2}{d\theta^2}H\right|_{\theta=0} = R\frac{\dot{\theta}^2R}{g}(1-0) - R\cdot 1 = R\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g} - 1\right) \underset{\frac{\dot{\theta}^2R}{g} > 1}{\Longrightarrow} > 0 \rightarrow$$

נקודת מינימום.

$$** \ \left.\frac{d^2}{d\theta^2}H\right|_{\theta=\pi} = R\frac{\dot{\theta}^2R}{g}(1-0) - R(-1) = R\left(\frac{\dot{\theta}^2R}{g} + 1\right) > 0 \longrightarrow$$

נקודת מינימום.

(VI)

*** $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}H\Big|_{\cos\theta=\frac{g}{\dot\theta^2R}} = R\frac{\dot\theta^2R}{g}\left(\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}-\left(1-\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}\right)\right)-R\frac{g}{\dot\theta^2R} = R\frac{\dot\theta^2R}{g}\left(2\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}-1\right)-R\frac{g}{\dot\theta^2R}=$

$= R\frac{\dot\theta^2R}{g}2\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}-R\frac{\dot\theta^2R}{g}-R\frac{g}{\dot\theta^2R} = 2R\frac{g}{\dot\theta^2R}-R\frac{\dot\theta^2R}{g}-R\frac{g}{\dot\theta^2R} = R\left(\frac{g}{\dot\theta^2R}-\frac{\dot\theta^2R}{g}\right)$

מאחר ו $\dot\theta^2R>g$ נקבע כי הביטוי

$\frac{g}{\dot\theta^2R}-\frac{\dot\theta^2R}{g}<0 \Rightarrow$ נקודת מקסימום.

עתה נציב בהגדרת ה-H

$$H=\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\sin^2\theta+R\cos\theta+R$$
$$\sin^2\theta=1-\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}\ ;\ \cos\theta=\frac{g}{\dot\theta^2R}$$

$$\Rightarrow H=\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}\right)+R\frac{g}{\dot\theta^2R}+R=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R}{g}R-\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\cdot\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}+R\frac{g}{\dot\theta^2R}+R=\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R}{g}R-\frac{1}{2}\frac{g}{\dot\theta^2R}R+R\frac{g}{\dot\theta^2R}+R=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\dot\theta^2R}{g}R+\frac{1}{2}\frac{g}{\dot\theta^2R}R+R=\boxed{R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\dot\theta^2R}{g}+\frac{g}{\dot\theta^2R}\right)+1\right]}$$

ה. לצורך חישוב המרחק האופקי של כדור הגלגל עלינו למצוא את הזמן שלקח לגוף להגיע לשיא הגובה. ערך זה מוכפל במהירות הכדור ($v=\dot\theta R$) תתן את התשובה שאני מחפש.

קודם מצאנו כי $t=\frac{v_{0y}}{g}$ וכי $v_{0y}=-\dot\theta R\sin\theta$ מאחר ואנו מעוניינים בגודל הזמן אז הסימן השלילי נופל

$$|t|=\frac{\dot\theta R\sin\theta}{g}$$

לכן המרחק של כדור הגלגל עד הוא:

$$X=t\cdot v=\frac{\dot\theta R}{g}\sin\theta\cdot\dot\theta R=\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\sin\theta$$

עבור הערך המירבי $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}}$ ולכן

$$\boxed{X=\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\sqrt{1-\frac{g^2}{\dot\theta^4R^2}}=\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\sqrt{\frac{\dot\theta^4R^2-g^2}{\dot\theta^4R^2}}=\frac{\dot\theta^2R^2}{g}\cdot\frac{1}{\dot\theta^2R}\sqrt{\dot\theta^4R^2-g^2}=\frac{\sqrt{\dot\theta^4R^2-g^2}}{g}R}$$

בדיקת יחידות מהירה - על הביטוי $\frac{\sqrt{\dot\theta^4R^2-g^2}}{g}$ להיות חסר יחידות

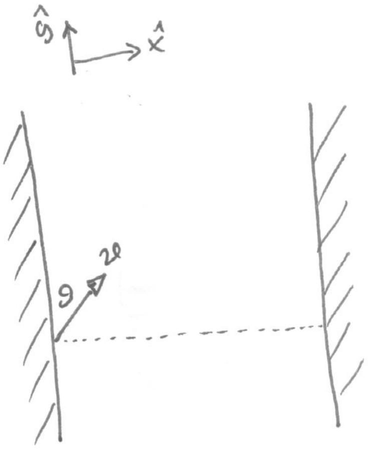
$$\frac{\sqrt{\dot\theta^4R^2-g^2}}{g}=\sqrt{\frac{\dot\theta^4R^2}{g^2}-1}=\sqrt{\left(\frac{\dot\theta^2R}{g}\right)^2-1}$$

$\dot\theta=$ מהירות זוויתית $=\frac{\text{זווית}}{\text{זמן}}=\frac{1}{s}\ \rightarrow\ \left(\frac{\frac{1}{s^2}\cdot m}{\frac{m}{s^2}}\right)^2$ ✓

$R=m$

$g=\frac{m}{s^2}$

(VII) (5)



יש לבחור כי על הסירה לנוע בזוית קבועה (θ) כנגד זרם הנהר. על כן ניתן לצפות תנועה בליסטית לפי:

$\hat{x}: v_x = v\sin\theta$

$\hat{y}: v_y = u_y + v\cos\theta$

מאחר ויש תלות של $u_y(x)$ נרצה להגדיר את x בכל זמן:

$$x = v\sin\theta\, t$$

$$t = \frac{x}{v\sin\theta} \qquad \text{ומכאן}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v\sin\theta} \qquad \text{ולכן}$$

עתה נסתכל על הדרך בכיוון y:

$$y = \int_0^T v_y\, dt = \int_0^T (u_y + v\cos\theta)\, dt = 0 \longleftarrow$$

התנאי הוא שההעתק יהיה אפס.

נפתח את האינטגרל:

$$0 = \int_0^T (u_y + v\cos\theta)\, dt = \int_0^T \left[-u_c + 4(u_c - u_b)\left[\frac{x}{d} - \frac{1}{2}\right]^2 + v\cos\theta\right] dt$$

נבצע החלפת משתנים $t \to x$ מפורשת

$x = v\sin\theta\, t$

$x(t=0) = 0$

$x(t=T) = d$

$$0 = \int_0^d \left[-u_c + v\cos\theta + 4(u_c - u_b)\left[\frac{1}{d^2}x^2 - \frac{1}{d}x + \frac{1}{4}\right]\right]\frac{dt}{dx}\, dx = \rightarrow \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v\sin\theta}$$

$$\rightarrow = \int_0^d (-u_c + v\cos\theta)\frac{1}{v\sin\theta}\, dx + 4(u_c - u_b)\int_0^d \left(\frac{1}{d^2}x^2 - \frac{1}{d}x + \frac{1}{4}\right)\frac{dx}{v\sin\theta} = \rightarrow$$

$$\rightarrow = (-u_c + v\cos\theta)\frac{1}{v\sin\theta}\cdot d + 4(u_c - u_b)\left[\frac{1}{d^2}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{d}\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^d \frac{1}{v\sin\theta} = \rightarrow \qquad \frac{4-\overset{1}{\cancel{6}}+3}{12}$$

$$\rightarrow = +\frac{d}{v\sin\theta}(-u_c + v\cos\theta) + \frac{4(u_c - u_b)}{v\sin\theta}\left[\frac{1}{\cancel{d^2}}d^3\frac{1}{3} - \frac{1}{\cancel{d}}\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{4}d\right] = -\frac{d}{v\sin\theta}(u_c + v\cos\theta) + \frac{4(u_c - u_b)}{v\sin\theta}d\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \rightarrow$$

$$\rightarrow = \frac{d}{v\sin\theta}(-u_c + v\cos\theta) + \frac{d}{v\sin\theta}(u_c - u_b)\frac{\cancel{4}}{\cancel{12}_3} = \frac{d}{v\sin\theta}\left(-u_c + v\cos\theta + \frac{1}{3}(u_c - u_b)\right) = \frac{d}{v\sin\theta}\left(-\frac{2}{3}u_c - \frac{1}{3}u_b + v\cos\theta\right)$$

(VIII)

$$\frac{d}{v\sin\theta}\left(-\frac{2}{3}u_c-\frac{1}{3}u_b+v\cos\theta\right)=0$$

$$\downarrow$$

$$v\cos\theta=\frac{1}{3}(2u_c+u_b)$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{1}{3v}(2u_c+u_b)}$$

הערה
$\sin\theta \neq 0$
$\downarrow$
לא תהיה
תנועה בליסטית.

בדיקת יחידות: $\dfrac{2u+u_b}{v} = \dfrac{\text{מהירות}}{\text{מהירות}} =$ חסר יחידות ✓.

בדיקת מקרה קיצון: ניקח למשל $\theta=90$ (הסירה נעה לכוון הגדה השניה ישירות)

$$\cos 90 = 0 = \frac{1}{3v}(2u_c+u_b)$$

$$\downarrow$$

$u_b=-2u_c \Leftarrow$ על מנת שהתנועה תושלם על הזרם במרכז
הנהר להיות מהופך לזה בקצוות הנהר ✓.

(6)

$$\vec{r}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\left(\frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i},\ \frac{\sum_i m_iy_i}{\sum_i m_i}\right)$$

א.

$$x=\frac{\overset{-5}{5(-1)}+\overset{20}{5(4)}+\overset{6}{1(6)}+\overset{15}{5(3)}}{5+5+1+5}=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$$

$$y=\frac{\overset{20}{5(4)}+\overset{-10}{5(-2)}+\overset{1}{1(1)}+\overset{20}{5(4)}}{5+5+1+5}=\frac{31}{16}$$

$$\left(\frac{9}{4},\frac{31}{16}\right)$$

ב.

$$x=\frac{\overset{-1}{1(-1)}+\overset{21}{3(7)}+\overset{6}{3(2)}+\overset{15}{3(5)}}{1+3+3+3}=\frac{41}{10}$$

$$y=\frac{\overset{-1}{1(-1)}+\overset{15}{3(5)}+\overset{9}{3(3)}+3(0)}{1+3+3+3}=\frac{23}{10}$$

$$\left(\frac{41}{10},\frac{23}{10}\right)$$

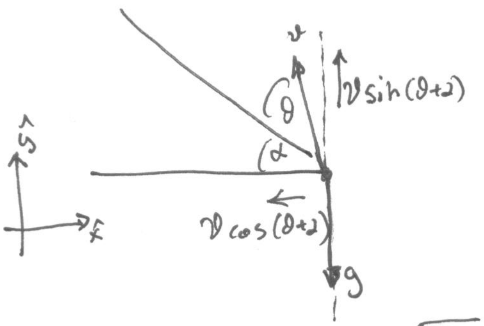
ג.

$$x=\frac{36+41}{26}=\frac{77}{26}$$

$$y=\frac{31+23}{26}=\frac{54}{26}$$

$$\left(\frac{77}{26},\frac{54}{26}\right)$$

(IX)

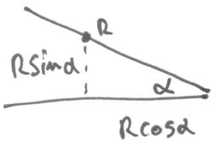


א.

$$\boxed{\vec{a} = (0, -g)}$$

$$\boxed{\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,dt = \big(\underbrace{0+\text{Const}}_{-v\cos(\theta+\alpha)},\ \underbrace{-gt+\text{const}}_{v\sin(\theta+\alpha)}\big) = \big(-v\cos(\theta+\alpha),\ -gt+v\sin(\theta+\alpha)\big)}$$

$$\boxed{\vec{x} = \int_0^t v\,dt = \big(-v\cos(\theta+\alpha)t+\underbrace{\text{const}}_{0},\ -\tfrac{1}{2}gt^2+v\sin(\theta+\alpha)t+\underbrace{\text{const}}_{0}\big)}$$



ב. נשווה את וקטור המיקום לנקודת הפגיעה R :

$$\vec{x}\big|_R = (-R\cos\alpha,\ R\sin\alpha)$$

ננסה לחלץ את R מהמשוואות:

$$x:\quad -R\cos\alpha = -v\cos(\theta+\alpha)t \longrightarrow t = \frac{R\cos\alpha}{v\cos(\theta+\alpha)}$$

$$y:\quad R\sin\alpha = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v\sin(\theta+\alpha)t$$

$$R\sin\alpha = -\frac{1}{2}g\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{v^2\cos^2(\theta+\alpha)}\right) + \cancel{v}\sin(\theta+\alpha)\frac{R\cos\alpha}{\cancel{v}\cos(\theta+\alpha)}$$

$$R^2\frac{1}{2}g\frac{\cos^2\alpha}{v^2\cos^2(\theta+\alpha)} + R\sin\alpha - R\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha}{\cos(\theta+\alpha)} = 0$$

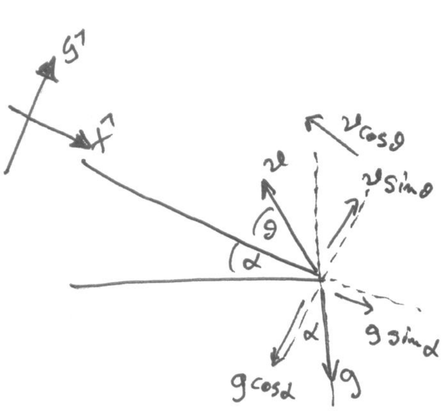
$$\frac{R}{\cos(\theta+\alpha)}\left[\frac{1}{2}g\frac{\cos^2\alpha}{v^2\cos(\theta+\alpha)}\cdot R + \underbrace{\big(\sin\alpha\cos(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha)\cos\alpha\big)}_{\sin(\alpha-\theta-\alpha)}\right] = 0$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$R = 0$$

$$\frac{1}{2}g\frac{\cos^2\alpha}{v^2\cos(\theta+\alpha)}R - \sin\theta = 0$$

$$\boxed{R = \frac{2v^2\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}}$$



דרך נוספת: לבחור את הסיבוב כמישור התנועה

$$\vec{a} = (g\sin\alpha,\ -g\cos\alpha)$$

$$\boxed{\vec{v} = \int a\,dt = \big(g\sin\alpha\,t + \underbrace{\text{Const}}_{-v\cos\theta},\ -g\cos\alpha\,t + \underbrace{\text{const}}_{v\sin\theta}\big) = \big(+g\sin\alpha\,t - v\cos\theta,\ -g\cos\alpha\,t + v\sin\theta}$$

$$\vec{x} = +\tfrac{1}{2}g\sin\alpha\,t^2 - v\cos\theta\,t + \underbrace{\text{Const}}_{0},\ -\tfrac{1}{2}gt^2\cos\alpha + v\sin\theta\,t + \underbrace{\text{Const}}_{0}\big)$$

(X)

הפעם נשווה את $\vec{x}$ ל $\vec{X}(R) = (-R, 0)$

ונקבל

$$-R = \frac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2 - v\cos\theta\, t$$

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha + v\sin\theta\, t \rightarrow t\left(-\frac{1}{2} g t\cos\alpha + v\sin\theta\right) = 0$$

$$t = 0 \qquad t = \frac{2v\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

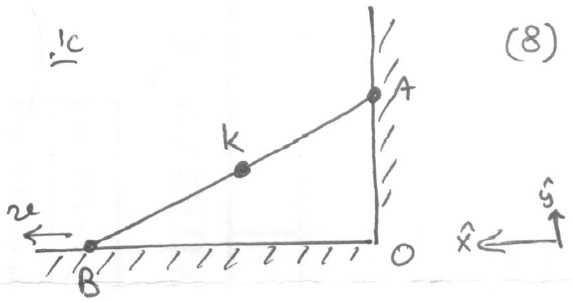
$$-R = \frac{1}{\cancel{2}} g\sin\alpha \frac{\overset{2}{\cancel{4}} v^2\sin^2\theta}{g^2\cos^2\alpha} - v\cos\theta\frac{2v\sin\theta}{g\cos\alpha} = \frac{2v^2\sin^2\theta\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} - \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g\cos\alpha} = \cdots$$

$$-R = \frac{2v^2\sin\theta}{g\cos^2\alpha}\left(\sin\theta\sin\alpha - \cos\theta\cos\alpha\right)$$

$$\boxed{R = \frac{2v^2\sin\theta}{g\cos^2\alpha}\left(\underbrace{\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha}_{\cos(\theta+\alpha)}\right) = \frac{2v^2\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}}$$

(8)

א.



ניקח את נקודה O כראשית הצירים. נגדיר את נקודה B כדוגמא:

$$B = (x+vt, 0)$$

ניתן למצוא בעזרת a (בפיתגורס)

$$A = \left(0, \sqrt{a^2-(x+vt)^2}\right)$$

כעת ניתן לתאר את נקודה K (מרכז הסולם), מחצית הדרך ל-B ב-$\hat{x}$ ומחצית הדרך ל-A ב-$\hat{y}$

$$K\left(\frac{1}{2}(x+vt), \frac{1}{2}\sqrt{a^2-(x+vt)^2}\right)$$

עתה נזכר בהגדרת של תנועה מעגלית $x^2+y^2=R^2$

ונבדוק את הריבועים של נקודה K:

$$K_x^2+K_y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2(x+vt)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(a^2-(x+vt)^2\right) = \frac{1}{4}\cancel{(x+vt)^2} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\cancel{(x+vt)^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\Downarrow$$

נקודה K נע תנועה מעגלית לפי רדיוס $\frac{a}{2}$. $\Leftarrow$ $R = \frac{a}{2}$

ב. נסתכל על וקטור המקום של נקודה K:

$$\vec{X}|_K = \left(\frac{1}{2}(x+vt), \frac{1}{2}\sqrt{a^2-(x^2+2vxt+v^2t^2)}\right)$$

עכשיו כדי לקבל מהירות:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \left(\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-(x+vt)^2}}\left(-2vx-2v^2t\right)\right) = \left(\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-(x+vt)^2}}\left(vx+v^2t\right)\right) =$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{2}v\left(1, -\frac{(1+vt)}{\sqrt{a^2-(x+vt)^2}}\right)}$$