טופולוגיה

תקציר

סיכום זה מבוסס על הרצאותיו של ד"ר טל נוביק, אוניברסיטת בר אילן, סמסטר אביב, תשע"ב 2012. אני מאחל בהצלחה לכל קורא ומתעניין בתחום! עידכון אחרון התבצע ב־11 בספטמבר 2012. **למבחן חובה לדעת את כל המשפטים וההוכחות! המבחן יכיל שאלות מן ההרצאה, שאלות משיעורי הבית ושאלות במבנה דומה!**

הסיכום **גמור**. במידה ומישהו רוצה לשתף הערות, לבקש להוסיף תוכן כלשהו או להודיע על טעות כלשהי, שלחו לי למייל mail@studenteen.org. כל הזכויות שמורות לאתר Studenteen.org.

תוכן עניינים

חלק I

מרחבים מטרים

1 מרחבים מטרים

לפני שנוכל לעסוק במושג הבסיסי של הקורס, שהוא מרחב טופולוגי, נציג גרסא פשוטה יותר עליה נדבר כרגע של מרחבים מטרים.

הגדרה 1.1 מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d : M \times M \to [0, \infty)$ כך שמתקיים:

(א) לכל $x, y \in M$, $d(x, y) = 0$ אם"ם $x = y$.[1]

(ב) לכל $x, y \in M$ $d(x, y) = d(y, x)$.

(ג) לכל $x, y \in M$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.[2]

הפונקציה d נקראית מטריקה על M.

המטריקה היא למעשה "מרחק" בין שתי נקודות, המקיימת את מה שהיינו מצפים מפונקציית מרחק לקיים. נציג דוגמאות ידועות למרחבים מטרים,

דוגמא 1.2 הקבוצות הבאות הן מרחבים מטריים

(א) $\mathbb{R}$ עם המטריקה $d(x, y) := |x - y|$.

(ב) $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} =: d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right)$. זאת נקראית המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$.[3]

(ג) $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$.[4]

ההוכחה כי (א) ו־(ב) הינן מטריקות מושארת כתרגיל. עבור (ג), שתי האקסיומות הראשונות מתקיימות גם כן בטריוויאליות.

נוכיח את אי־שיוויון המשולש עבור ג': **הוכחה.** יהיו $x = (x_1, \ldots x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $|x_i - y_i| \leq d(x, y)$, ו־$|y_i - z_i| \leq d(y, z)$.

ולכן, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq d(x, y) + d(y, z)$$

וזה בפרט נכון עבור המקסימום של $|x_i - z_i|$, ולכן סה"כ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. ■

[1] כלומר, לכל $x \in M$ מתקיים $d(x, x) = 0$, ואם $x \neq y$, אזי $d(x, y) \neq 0$.
[2] זה נקרא אי־שיוויון המשולש.
[3] לעיתים נקראית d^2.
[4] לעיתים נקראית d^∞.

(ד) תהי M קבוצה כלשהי. נגדיר על M את המטריקה הבאה,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

מטריקה זו נקראית המטריקה הדיסקרטית. קל לראות כי שלושת האקסיומות אכן מתקיימות.

כעת, נגדיר את המושג של "תת־מרחב" בעולם של מרחבים מטרים,

הגדרה 1.3 יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי $A \subseteq M$ קבוצה כלשהי. אזי, הצמצום של d ל־$A \times A$ מהווה מטריקה על A. מטריקה זו נקראית המטריקה המושרה על A מ־M, ועם מטריקה זו A נקרא תת מרחב מטרי של M.

דוגמא 1.4 להלן דוגמאות לתתי מרחבים מטריים:

(א) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

(ב) $S^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ היא הספירה ה־n מימדית.[5]

2 סדרות במרחב מטרי

נרצה כעת להוכיח טענות שהיו ידועות לנו על סדרות ב־$\mathbb{R}^n$, על התכנסות ורציפות, גם על **מרחבים מטרים**.

הגדרה 2.1 סדרה בקבוצה M היא פונקציה $a : \mathbb{N} \to M$. נהוג לסמן את $a(n)$ ב־a_n.

נגדיר כעת את מושג ההתכנסות במרחב מטרי.

הגדרה 2.2 יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי a_n סדרה ב־M, ותהי $b \in M$. נאמר שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ל־b אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(a_n, b) < \epsilon$. בהתאם לכך, נסמן זאת בסימונים $a_n \to b$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, ו־$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

נוכיח כעת מספר טענות על הגדרת ההתכנסות לעיל, שתואמים לתכונות של התכנסות ב־$\mathbb{R}$.

טענה 2.3 אם קיים גבול לסדרה $\{a_n\}$ אזי הוא יחיד.

הוכחה. נניח בשלילה שלסדרה יש שני גבולות שונים $b \neq c$. נסמן $\epsilon = \frac{1}{2} d(b,c)$, ונשים לב ש־$\epsilon > 0$ כי $b \neq c$. לפי ההנחה, $a_n \to b$ ולכן קיים n_0 כך ש־$d(a_n, b) < \epsilon$ לכל $n \geq n_0$. כמו כן, $a_n \to c$ ולכן קיים n_1 כך ש־$d(a_n, c) < \epsilon$ לכל $n \geq n_1$. ניקח $N = \max\{n_0, n_1\}$. אזי מתקיים $d(a_N, b) < \epsilon$, $d(a_N, c) < \epsilon$. ולכן,

$$d(b,c) \leq d(b, a_N) + d(a_N, c) < \epsilon + \epsilon = d(b,c)$$

וזאת סתירה. ∎

[5] למשל, $S^0 = \{-1, 1\}$, ו־S^1 היא מעגל היחידה.

טענה 2.4 $a_n \to b \iff d(a_n,b) \to 0$

הוכחה. ($\Rightarrow$) נניח $a_n \to b$ וצ"ל $d(a_n,b) \to 0$. לשם כך, יהי $\epsilon > 0$. מהתכנסות a_n ל־b קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $d(a_n,b) < \epsilon$. עבור אותו n_0 מתקיים שלכל $n \geq n_0$

$$|d(a_n,b) - 0| < \epsilon$$

($\Leftarrow$) נניח $d(a_n,b) \to 0$, וצ"ל $a_n \to b$. בהינתן $\epsilon > 0$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $|d(a_n,b) - 0| < \epsilon$, כלומר $d(a_n,b) < \epsilon$. ■

כעת, ניתן דוגמאות נגדיות לתכונות של $\mathbb{R}^n$ **שאינן** נכונות במרחבים מטרים באופן כללי. לשם כך, נגדיר את המושג "סדרות קושי".

2.1 סדרות קושי

הגדרה 2.5 יהי (M,d) מרחב מטרי. סדרה $\{a_n\}$ נקראית סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n \geq n_0$ מתקיים $d(a_n,a_m) < \epsilon$.

נוכיח כעת את הטענה הבאה,

טענה 2.6 כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

הוכחה. תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת ל־b. יהי $\epsilon > 0$ נתון. מהגדרת ההתכנסות עם $\frac{\epsilon}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $d(a_n,b) < \frac{\epsilon}{2}$. לכן, בהכרח מתקיים $d(a_n,a_m) \leq d(a_n,b) + d(a_m,b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. ■

ב־$\mathbb{R}^n$, גם הכיוון ההפוך מתקיים. כלומר, **כל** סדרת קושי היא סדרה מתכנסת, אך זה אינננו נכון באופן כללי במרחבים מטרים. **למשל**,

1. $\mathbb{Q}$.
2. $(0,1)$ והסדרה $\{\frac{1}{n}\}$. היא סדרת קושי ב־$(0,1)$ אך היא איננה מתכנסת[6].

בהתאם לכך, נאמר שמרחב מטרי שבו כל סדרה קושי מתכנסת נקרא מרחב מטרי שלם.

2.2 סדרות חסומות ודוגמא נגדית למשפט בולצאנו־ווירשטראס

נפריך את משפט בולצאנו־ווירסטראש, האומר כי לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

הגדרה 2.7 סדרה $\{a_n\}$ נקראית חסומה אם קיים $b \in M$ וקיים $R > 0$ כך ש־$d(a_n,b) \leq R$ לכל n.

עבור $\mathbb{N}$ עם המטריקה הדיסקרטית, הסדרה $a_n = n$ חסומה[7] אך היא אינה סדרת קושי וכל תת סדרה שלה אינה קושי[8].

[6] וזאת כי היא מתכנסת ל־0, ו־$0 \notin (0,1)$.
[7] וזאת כי המרחק הוא 1 בין כל נקודה לכל נקודה.
[8] הוכחנו כי כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, בסתירה.

3 פונקציות רציפות

3.1 כדורים פתוחים

נרצה להכליל כעת את המושג של "קטעים פתוחים" שהיו ב־$\mathbb{R}$, באמצעות המושג החדש של כדורים פתוחים.

הגדרה 3.1 יהי (M,d) מרחב מטרי, $a \in M$, $r > 0$. נסמן

$$B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$$

כאשר $B(a,r)$ נקרא הכדור הפתוח סביב a ברדיוס r.

למשל, $B((2,-1),4)$ ב־$\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(2,-1)$, ו־$B(7,3)$ הוא הקטע הפתוח $(7-3,7+3)=(4,10)$.

בהתאם לכך, נראה הגדרה שקולה להתכנסות של סדרה,

הגדרה 3.2 $x_n \to a$ אם לכל $\epsilon > 0$ יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a,\epsilon)$.

3.2 רציפות

נכליל את מושג הרציפות הידוע על פונקציות ב־$\mathbb{R}$ על מרחבים מטריים באופן הבא,

הגדרה 3.3 יהיו (M,d) (N,ρ) מרחבים מטרים, $f: M \to N$ פונקציה, ותהי $a \in M$. אנו נאמר ש־f רציפה ב־a אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in M$, אם $d(x,a) < \delta$ אזי $\rho(f(x),f(a)) < \epsilon$. בסימון של כדורים נקבל את ההגדרה $f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$. אם $f: M \to N$ רציפה בכל נקודה $a \in M$ אז אנו קוראים ל־f רציפה.

משפט 3.4 יהיו (M,d), (N,ρ) מרחבים מטרים, $f: M \to N$, $a \in M$. אזי, f רציפה $\iff$ לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־M שמתכנסת ל־a מתקיים ש־$f(x_n) \to f(a)$.

הוכחה. ($\Rightarrow$) נניח f רציפה ב־a, ותהי x_n סדרה ב־M המתכנסת ל־a. נוכיח כי $f(x_n) \to f(a)$.

לשם כך, יהי $\epsilon > 0$ נתון. f רציפה ב־a ולכן יש $\delta > 0$ כך ש־$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$. לפי ההנחה, $x_n \to a$ ולכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a,\delta)$ ולכן עבור $n \geq n_0$ יתקיים $f(x_n) \in B(f(a),\epsilon)$.

■

($\Leftarrow$) לכיוון השני, נניח ש־f לא רציפה ב־a. עלינו למצוא סדרה $x_n \to a$ ובכל זאת $f(x_n) \not\to f(a)$. f לא רציפה ב־a, ולכן קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ יש x כך ש־$d(x,a) < \delta$ ובכל זאת $\rho(f(x),f(a)) \geq \epsilon$. בפרט זה נכון לכל δ מהצורה $\frac{1}{n}$.

כלומר, לכל n יש x כך ש־$d(x,a) < \frac{1}{n}$, ובכל זאת $\rho(f(x),f(a)) \geq \epsilon$. עבור כל δ מצורה זו נבחר x, ונקבל סדרה x_n.

מתקיים $0 \leq d(x_n,a) < \frac{1}{n}$[9], ולכן לפי משפט הסנדוויץ' עבור סדרות ממשיות ומטענה שהוכחנו על סדרות, נקבל כי $x_n \to a$, אולם עבור ה־ϵ שלנו, $\rho(f(x_n),f(a)) \geq \epsilon$. ■

[9] וזאת כי בכל שלב בבחירה של x_n, $x_n \in B(a,\frac{1}{n})$, ולפי ההגדרה $d(a,x_n) < \frac{1}{n}$.

4 קבוצות פתוחות וסגורות

הגדרה 4.1 יהי (M,d) מרחב מטרי. תת קבוצה $U \in M$ תקרא פתוחה ב־M אם לכל $x \in U$ יש $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq U$.

טענה 4.2 כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה. יהי $B(a,r)$ כדור פתוח ויהי $x \in B(a,r)$. נסמן $\epsilon = r - d(a,x)$. נשים לב כי מהגדרת $B(a,r)$ מתקיים ש־$d(a,x) < r$, ולכן $\epsilon > 0$.

נראה כי $B(x,\epsilon) \subseteq B(a,r)$. צריך להראות שלכל y, אם $d(x,y) < \epsilon$ אזי $d(a,y) < r$. וכן אם $d(x,y) < \epsilon$,

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r - d(a,x) = r$$

■

משפט 4.3 הטענות הבאות מתקיימות:

(א) $M, \emptyset$ הינן פתוחות ב־M.

(ב) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות ב־M, אז גם $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה ב־M.

(ג) אם $U_1, \dots U_n$ קבוצות פתוחות ב־M, אזי $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ פתוחה ב־M.

הוכחה. (א) קל. עבור $\emptyset$ זה נובע באופן הריק, ועבור M נובע ישירות מן ההגדרה.

■

(ב) יהי $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. אזי, קיים $\alpha \in I$ כך ש־$x \in U_\alpha$. לפי ההנחה, U_α פתוחה ב־M ולכן יש $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq U_\alpha$. ולכן ודאי $B(x,r) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.

■

(ג) יהי $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. אזי, $x \in U_1$ ולכן קיים $\epsilon_1 > 0$ כך ש־$B(x,\epsilon_1) \subseteq U_1$, $\epsilon_2 > 0$ כך ש־$B(x,\epsilon_2) \subseteq U_2$,..., $\epsilon_n > 0$ כך ש־$B(x,\epsilon_n) \subseteq U_n$.

בהתאם לכך, נסמן $r = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. כיוון שזה אוסף סופי של מספרים חיוביים ממש, גם המינימום חיובי ממש ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $B(x,r) \subseteq U_i$. ולכן בהכרח מתקיים $B(x,r) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. ■

הגדרה 4.4 אם $x \in M$, אזי סביבה של X פירושה קבוצה פתוחה $U \subseteq M$ כך ש־$x \in U$.

טענה 4.5 יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \to N$, $a \in M$. אזי, f רציפה ב־a $\iff$ לכל סביבה U של $f(a)$ קיימת סביבה V של a כך ש־$f(V) \subseteq U$.

הוכחה. (⇐) נניח כי f רציפה ב־a. תהי U סביבה של $f(a)$. U פתוחה, $f(a) \in U$ ולכן יש $\epsilon > 0$ כך ש־$B(f(a), \epsilon) \subseteq U$.

f רציפה ב־a, ולכן יש $\delta > 0$ כך ש־$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$. ניקח $V = B(a, \delta)$. V אכן סביבה של a, ו־V אכן פתוחה[10].

■

(⇒) נניח כי מתקיים התנאי על סביבות, ויהי $\epsilon > 0$. $B(f(a), \epsilon)$ היא סביבה של $f(a)$ ולכן יש סביבה V של a כך ש־$f(V) \subseteq B(f(a), \epsilon)$.

V פתוחה ו־ $a \in V$, ולכן יש $\delta > 0$ כך ש־$B(a, \delta) \subseteq V$, ונקבל $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$. ■

טענה 4.6 יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \to N$. אזי, f רציפה $\iff$ לכל $U \subseteq N$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־M[11].

הוכחה. (⇐) נניח כי f רציפה, ותהי $U \subseteq N$ פתוחה. נוכיח כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

תהי $a \in f^{-1}(U)$. f רציפה ב־a, ולכן מהטענה הקודמת יש סביבה V_a של a כך ש־$f(V_a) \subseteq U$. מכאן, $V_a \subseteq f^{-1}(U)$.

נציג כעת למה, לה נקרא בהמשך "הלמה השימושית", להמשך ההוכחה.

למה 4.7 (הלמה השימושית) תהי A קבוצה. נניח לכל $x \in A$ נתון $x \in E_x \subseteq A$. אזי

$$\bigcup_{x \in A} E_x = A$$

כעת, נוכל בעזרת הלמה להסיק כי בגלל ש־$a \in V_a$ לכל $a \in f^{-1}(U)$, ו־$V_a \subseteq f^{-1}(U)$, כי

$$\bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a = f^{-1}(U)$$

ולכן, הצגנו את $f^{-1}(U)$ כאיחוד של קבוצות פתוחות, ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

■

(⇒) נניח כי התמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה. נראה ש־f רציפה ב־a לכל $a \in M$.

תהי סביבה U של $f(a)$. ניקח $V = f^{-1}(U)$. לפי ההנחה, היא פתוחה, וגם $a \in V$ ומתקיים כי $f(V) \subseteq U$. ולכן, לכל סביבה של $f(a)$ קיימת סביבה של a כך ש־$f(V) \subseteq U$, ולכן לפי טענה קודמת, f רציפה ב־a. זה נכון לכל $a \in M$. ■

[10]שכן כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

[11]במילים, f רציפה אס"ם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

4.1 שקילות מטריקות

הגדרה 4.8 נאמר כי שתי מטריקות d,ρ על אותה קבוצה M הן שקולות אם קבוצה $U \subseteq M$ היא פתוחה לפי d $\iff$ היא פתוחה לפי ρ.

דוגמא 4.9 דוגמאות למטריקות שקולות הן:

(א) (M,d) הוא מרחב מטרי, אזי $(M,5d)$ מטריקה שקולה.

(ב) על $\mathbb{R}^n$, המטריקות d^2 ו־d^∞ שקולות. כיצד נוכיח זאת?

למה 4.10 עבור $a \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, אזי $B^2(a,r) \subseteq B^\infty(a,r)$ וגם $B^\infty(a,r) \subseteq B^2(a,\sqrt{n}\cdot r)$.

הוכחה. נסמן $x=(x_1,\dots,x_n),\ a=(a_1,\dots,a_n)$.

עבור ההכלה הראשונה, נניח $x \in B^2(a,r) \Longleftarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2 < r^2 \Longleftarrow (x_i-a_i)^2 < r^2 \Longleftarrow |x_i-a_i|<r$.

זה נכון לכל i, ולכן $\max_{1\le i\le n}|x_i-a_i| < rr \Longleftarrow x \in B^\infty(a,r)$.

עבור ההכלה השניה, נניח $x \in B^\infty(a,r) \Longleftarrow |x_i-a_i|<r$ לכל $i \Longleftarrow |x_i-a_i|^2<r^2$ לכל $i \Longleftarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i-a_i|^2 <$ nr^2, וזה גורר כי $x \in B(a,\sqrt{n}\cdot r)$. ■

בהמשך לכך, איך למעשה נראים כדורים פתוחים במטריקות d^2,d^∞ ב־$\mathbb{R}^2$?[12]

נחזור להוכחה כי המטריקות שקולות: **הוכחה.** ($\Leftarrow$) תהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה לפי המטריקה האוקלידית. נראה כי זו פתוחה לפי מטריקת MAX.[13]

תהי $a \in U$. כיוון שהיא פתוחה לפי המטריקה האוקלידית, יש $r>0$ כך ש־$B^2(a,r) \subseteq U$. אזי, $B^\infty(a,\frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq$ $B^2(a,r) \subseteq U$.

■

($\Rightarrow$) באופן זהה. ■

בהתאם לכך, מהן הקבוצות הפתוחות ביחס למטריקה הדיסקרטית?[14]

[12] עבור $B^2(a,r)$, מדובר בעיגול שמרכזו a ורדיוסו r. עבור $B^\infty(a,r)$ מדובר בריבוע החוסם את המעגל מרדיוס r שמרכזו ב־a.

[13] d^∞.

[14] כל תתי הקבוצות, וזאת כי $B^{disc}(a,\frac{1}{2}) \subseteq \{a\}$.

טענה 4.11 יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת־מרחב. אזי, $U \subseteq A$ קבוצה פתוחה ב־A $\iff$ יש $W \subseteq M$ קבוצה פתוחה ב־M כך ש־$U = W \cap A$.

הוכחה. ($\Rightarrow$) נניח כי W פתוחה ב־M, ותהי $U = W \cap A$. נוכיח כי U פתוחה ב־A. לשם כך, נוכיח את הלמה הבאה,

עבור $a \in A$, מתקיים

$$B^A(a,r) = B^M(a,r) \cap A$$

כאשר B^A הוא הכדור הפתוח על פני הנקודות ב־A, ו־B^M הוא הכדור הפתוח על פני הנקודות ב־M. ההוכחה לכך טריוויאלית.

יהי $a \in U$. לכן, $a \in W$ ולכן יש $r > 0$ כך ש־$B^M(a,r) \subseteq W \Longleftarrow$ $B^A(a,r) = B^M(a,r) \cap A \subseteq W \cap A = U$.

■

($\Leftarrow$) נניח כי $U \subseteq A$ פתוחה ב־A. נבנה $W \subseteq M$ פתוחה ב־M כך ש־$U = W \cap A$. לכל $x \in U$ יש $r_x > 0$ כך ש־$B^A(x, r_x) \subseteq U$.

ולכן לפי הלמה השימושית מתקיים

$$\bigcup_{x \in U} B^A(x, r_x) = U$$

כעת, נגדיר $W = \bigcup_{x \in U} B^M(x, r_x)$. W פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. כמו כן,

$$W \cap A = \left(\bigcup_{x \in U} B^M(x, r_x)\right) \cap A = \bigcup_{x \in U} (B^M(x, r_x) \cap A) = \bigcup_{x \in U} B^A(x, r_x) = U$$

■

הערה 4.12 נשים לב כי מתקיימות התכונות הבאות:

(א) אם A פתוחה, $U \subseteq A$ פתוחה ב־A אז U גם פתוחה ב־M.

(ב) אם $U \subseteq A$ פתוחה ב־M אז U פתוחה ב־A, כי $U = U \cap A$.

4.2 קבוצות סגורות

הגדרה 4.13 יהי M מרחב מטרי. $S \subseteq M$ נקראית סגורה אם S^c פתוחה. מן התכונות של קבוצות פתוחות וכללי דה־מורגן נקבל כי:

(א) $\emptyset, M$ סגורות

(ב) אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ סגורה.

(ג) אם $S_1, \dots, S_n$ אוסף <u>סופי</u> כלשהו של קבוצות סגורות, אז גם $S_1 \cup \dots \cup S_n$ סגורה.

משפט 4.14 יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת־קבוצה. אזי A סגורה ב־M $\iff$ היא מקיימת את התכונה הבאה: לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־A, אם הסדרה מתכנסת ב־M אז הגבול שייך ל־A.[15]

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי A סגורה, ונניח $\{x_n\}$ סדרת נקודות ב־A כך ש־$x_n \to p$. נוכיח כי $p \in A$.

נניח בשלילה כי $p \in A^c$. A^c פתוחה, ולכן קיים $r > 0$ כך ש־$B(p,r) \subseteq A^c$. לפי ההנחה, $x_n \to p$ ולכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים$x_n \in B(p,r) \subseteq A^c$, אך מצד שני, $x_n \in A$ בסתירה.

■

($\Rightarrow$) נניח לכיוון הזה כי A לא סגורה, ונראה שלא מתקיים התנאי על סדרות. כלומר, נראה שיש לפחות סדרה אחת של נקודות ב־A שמתכנסת לנקודה מחוץ ל־A.

A לא סגורה, ולכן A^c לא פתוחה. ולכן, יש נקודה $p \in A^c$ שעבורה לכל $\epsilon > 0$, $B(p,\epsilon) \nsubseteq A^c$. לכל n, עבור $\epsilon = \frac{1}{n}$, ניקח $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$ שאיננה ב־A^c. כלומר, $x_n \in A$.

קיבלנו סדרה $\{x_n\}$ של נקודות ב־A כך ש־$d(x_n,p) < \frac{1}{n}$, ולכן $x_n \to p$, אך $p \notin A$. ■

להלן טענה פשוטה המושארת כתרגיל לקורא,

טענה 4.15 יהי M מרחב מטרי, $\{x_n\}$ סדרת נקודות ב־M, $p \in M$. אזי, $x_n \to p \iff$ לכל סביבה U של p, יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

4.3 נקודות הצטברות

הגדרה 4.16 יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$, $p \in M$. נאמר ש־p היא נקודת הצטברות של A אם לכל $r > 0$ יש $x \in A$ כך ש־$0 < d(x,p) < r$. נציג ניסוחים שקולים,

(א) לכל $r > 0$ יש $p \neq x \in A$ כך ש־$d(x,p) < r$.

(ב) לכל סביבה U של p יש $p \neq x \in A$ כך ש־$x \in U$.

(ג) לכל סביבה U של p, $U \cap (A \backslash \{p\}) \neq \emptyset$.

(ד) לכל סביבה U של p, $A \cap (U \backslash \{p\}) \neq \emptyset$.

טענה 4.17 אם p נקודת הצטברות של A, אז קיימת סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־A, שכולן שונות מ־p, וכולן שונות זו מזו, כך ש־$x_n \to p$.

הוכחה. נניח כי p נקודת הצטברות של A. אזי, קיים $x_1 \in A$ כך ש־$x \neq p$, $d(x_1,p) < 1$, קיים $p \neq x_2 \in A$ כך ש־$d(x_2,p) < \min(\frac{1}{2}, d(x,p))$.

באופן רקורסיבי נבחר $p \neq x_n \in A$ כך ש־

$$d(x_n,p) < \min(\frac{1}{n}, d(x_{n-1},p))$$

נקבל סדרה x_n כנדרש. ■

מסקנה 4.18 אם p נקודת הצטברות של A אז לכל $r > 0$ יש אינסוף נקודות $x \in A$ כך ש־$0 < d(x,p) < r$.

[15] בניסוח אחר, אם יש $p \in M$ כך ש־$x_n \to p$, אזי $p \in A$.

5 קומפקטיות במרחבים מטריים

הגדרה 5.1 יהי M מרחב מטרי נתון.

(א) כיסוי של M הינו אוסף $\{U_i\}_{i\in I}$ של תת קבוצות ב־M כך ש־$M = \bigcup_{i\in I} U_i$. נאמר שכיסוי של M הוא כיסוי פתוח אם לכל $i \in I$, U_i פתוחה ב־M.

(ב) אוסף חלקי נקרא תת־כיסוי של $\{U_i\}_{i\in I}$ אם $J \subseteq I$ וגם $\bigcup_{j\in J} U_j = M$.

(ג) $\gamma_\delta := \{B(x,\delta)\}_{x\in M}$. זה מקרה פרטי של כיסוי פתוח $\bigcup_{x\in M} B(x,\delta) = M$.

(ד) אומרים שמספר ממשי $\delta > 0$ הוא מספר לבג עבור כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ אם γ_δ מעדן את $\{U_i\}_{i\in I}$. משמעות "מעדן", היא כי לכל $B(x,\delta)$ קיים $i_0 \in I$ כך ש־$B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$. עבור כיסוי פתוח α ו־γ_δ המעדן אותו, נרשום $\gamma_\delta \prec \alpha$.

5.1 מרחב קומפקטי

הגדרה 5.2 (קומפקטיות) נאמר שמרחב M הוא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ של M, קיים תת־כיסוי סופי.

דוגמא 5.3 $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי. ניקח את הכיסוי $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. אין תת כיסוי סופי, מכיוון שאם היה קיים, היינו מקבלים כי $\mathbb{R} = (-n_0, n_0)$ עבור $n_0 \in \mathbb{N}$ כלשהו[16], ומכאן כי $\mathbb{R}$ חסום, בסתירה.

הגדרה 5.4 נאמר שמרחב מטרי M הוא חסום אם קיים $c > 0$ כך ש־$d(x,y) \le c$ לכל $x, y \in M$. ניסוח שקול לכך הוא שקיים $r > 0$ כך ש־$M = B(x,r)$.

טענה 5.5 כל מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום.

הוכחה. נבחר $x_0 \in M$. נביט בכיסוי $\{B(x_0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. בהכרח $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0,n)$, וזה כיסוי פתוח. לכן, לפי הקומפקטיות, יש תת־כיסוי סופי. ניקח n_0 להיות האינדקס המקסימלי מבין הקבוצות שבתת הכיסוי, ונקבל כי $M = B(x_0, n_0)$, ולכן M חסום. ■

משפט 5.6 נניח כי (M,d) מרחב מטרי. אזי, התנאים הבאים שקולים.

א. M קומפקטי.

ב. לכל תת־קבוצה אינסופית $E \subseteq M$ קיימת נקודת הצטברות.

ג. לכל סדרה ב־M יש תת־סדרה שמתכנסת.

הוכחה. (א ⇐ב) נניח בשלילה שקיימת תת־קבוצה אינסופית $E \subseteq M$ ללא נקודות הצטברות. לכן, לכל $x \in M$ קיים $\varepsilon_x > 0$ מספיק קטן כך ש

$$B(x,\varepsilon_x) \cap (E \backslash \{x\}) = \emptyset$$

$$B(x,\varepsilon_x) \cap E = \begin{cases} \{x\} & x \in E \\ \emptyset & else \end{cases}$$

[16] מכיוון שקיים תת־כיסוי סופי, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ הקטע עם האינדקס המקסימלי בתת הכיסוי הסופי. לכל $n < n_0$, $(-n,n) \subseteq (-n_0,n_0)$ ולכן איחודם, שהוא מכסה את $\mathbb{R}$, שווה ממש ל־$(-n_0,n_0)$.

וזה כי לכל $x \in M$, x אינה נקודת הצטברות של E.

נגדיר $\{B(x,\varepsilon_x)\}_{x\in M}$, זה כיסוי פתוח של M, $\bigcup\limits_{x\in M} B(x,\varepsilon_x) = M$,

ולכן, לפי ההנחה, M קומפקטית ולכן יש תת־כיסוי סופי. ז"א, קיימים $x_1,\ldots,x_n \in M$ כך ש־ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon_{x_i}) =$ M.

ומתקיים

$$\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap B(x_i,\varepsilon_{x_i})) = E\cap M = E$$

כאשר $E\cap B(x_i,\varepsilon_{x_i})$ כל אחד מכיל לכל היותר נקודה אחת, ומכאן נקבל כי E קבוצה סופית! בסתירה.

■

(ב ⇐ג) נניח $\{x_n\}$ סדרה נתונה ב־M, ונרצה להוכיח כי קיימת לה תת־סדרה מתכנסת.

אם יש מספר סופי של ערכים בסדרה, אז יש לפחות ערך אחד שמופיע אינסוף פעמים. לכן, באופן טריוויאלי אפשר לבחור תת־סדרה קבועה, והיא כמובן תמיד מתכנסת.

לכן, נניח בה"כ שיש אינסוף ערכים. נסמן ב־E את קבוצת הערכים של הסדרה, ולכן E אינסופית.

לפי ההנחה, קיימת נקודת הצטברות $p \in M$ עבור E. כלומר, לכל סביבה פתוחה U של p, $|U\cap(E\backslash\{p\})| \geq \aleph_0$ וגם החיתוך אינסופי. ז"א, קיים $x_{n_1} \in B(p,1)\cap(E\backslash\{p\})$.[17]

כמו כן, קיים $x_{n_2} \in B(p,\frac{1}{2})\cap(E\backslash\{p\})$ כך ש־$n_2 > n_1$ (וזה כי החיתוך אינסופי). כמו כן, קיים $x_{n_3} \in B(p,\frac{1}{3})\cap(E\backslash\{p\})$ כך ש־$n_3 > n_2$.

נמשיך כך לקבל ונקבל תת־סדרה $x_{n_1},x_{n_2},\ldots$ של $\{x_n\}$, ולפי הבחירה, $x_{n_k}\to p$ מתכנסת ב־M.

■

(ג ⇐א) נחלק את ההוכחה לשני שלבים,

שלב ראשון. נניח כי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של M. נוכיח כי קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור $\{U_i\}_{i\in I}$. ז"א, נוכיח שקיים $\delta > 0$ כך ש

$$\gamma_\delta = \{B(x,\delta)\}_{x\in M}$$

עידון של $\{U_i\}_{i\in I}$כלומר, לכל $x \in M$ קיים $i_0 \in I$ כך ש־$B(x,\delta)\subseteq U_{i_0}$.

נניח בשלילה כי זה לא מתקיים. כלומר, לכל n, קיים $x_n \in M$ כך שלכל $i \in I$, $B(x_n,\frac{1}{n})\nsubseteq U_i$.

מכאן, קיבלנו סדרה $\{x_n\}$ ב־M. לפי ההנחה, קיימת תת־סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}$ ל־M. ז"א, קיים $p \in M$ כך ש־$x_{n_k}\to p$. בגלל ש־$\{U_i\}$ כיסוי, קיים $i_0 \in I$ כך ש־$p \in U_{i_0}$.

נתון כי U_{i_0} קבוצה פתוחה, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$B(p,\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$.

[17] וזאת כי הכדור הפתוח היא סביבה של p.

ניקח n_k מספיק גדול כך ש־

$$\begin{cases} \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

הראשון אפשרי באופן טריוויאלי, והשני אפשרי כי $x_{n_k} \to p$.

נוכיח כי $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq U_{i_0}$. לשם כך, יהי $x \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, לפי אי־שיוויון המשולש, מתקיים

$$d(x,p) \le d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ולכן $x \in B(p,\varepsilon)$. ולכן, $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(p,\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$, וסה"כ $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq U_{i_0}$, בסתירה להנחה, ולכן יש מספר לבג $\delta > 0$.

שלב שני. נניח בשלילה ש־M אינה קומפקטית. ז"א, קיים כיסוי פתוח $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ ללא תת־כיסוי סופי.

לפי השלב הראשון, קיים מספר לבג $\delta > 0$. נבחר $x_1 \in M$. בהכרח קיים $x_2 \in M$ כך ש־ $x_2 \notin B(x_1,\delta)$. מדוע? אם לא, אזי $B(x_1,\delta) = M$, ובגלל ש־δ מספר לבג, γ_δ מעדן את $\{U_i\}_{i\in I}$, ז"א, עבור $B(x_1,\delta)$ קיים $U_{i_1} \in \alpha$ כך ש־$B(x_1,\delta) \subseteq U_{i_1}$, ולכן הקבוצה U_{i_1} מהווה תת־כיסוי סופי, בסתירה להנחה.

כעת, קיים $x_3 \notin B(x_1,\delta) \cup B(x_2,\delta)$, וזאת כי אם לא, $B(x_1,\delta) \cup B(x_2,\delta) = M$, ולכן מכאן באותו אופן לעיל, קיים תת־כיסוי סופי ב־α, בסתירה.

בהמשך לכך, $\exists x_{n+1} \notin B(x_1,\delta) \cup \cdots \cup B(x_n,\delta)$ לכל n, כי אחרת $M = B(x_1,\delta) \cup \cdots \cup B(x_n,\delta)$, וכל כדור $B(x_k,\delta)$ מוכל ב־ U_{i_k} כלשהו, ולכן נקבל $M = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, וזהו תת־כיסוי סופי, בסתירה.

ולכן, קיבלנו סדרה אינסופית עם התכונה כי $d(x_i,x_j) \ge \delta$[18], ולכן אין לה תת־סדרה מתכנסת[19], בסתירה להנחה כי לכל סדרה קיימת תת־סדרה מתכנסת. הסתירה מוכיחה כי M קומפקטי. ■

הערה 5.7 לפי המשפט הקודם, א,ב,ג שקולים ולכן בכל מרחב קומפקטי מטרי, לכל כיסוי פתוח קיים מספר לבג.

טענה 5.8 נניח (M,d) מרחב מטרי, (Y,d_Y) תת־מרחב מטרי. אזי, אם (Y,d_Y) מרחב קומפקטי, אזי Y סגורה ב־M.

הוכחה. נניח בשלילה ש־Y לא סגורה ב־M. ז"א, זה שקול כי Y אינה סגורה ב־M לגבי הגבולות. לכן, קיימת סדרה $\{y_n\} \subseteq Y$ כך ש־$y_n \xrightarrow{M} p \in M$, ו־$p \notin Y$.

Y קומפקטי, ומכאן Y "קומפקטי סדרתית"[20] ולכן קיימת תת סדרה $\{y_{n_k}\}$ מתכנסת ב־Y. ז"א, קיימת $q \in Y$ ו־$y_{n_k} \xrightarrow{M} q$, נקבל שיש שני גבולות שונים $p \neq q$, בסתירה ליחידות הגבול. ■

[18] כי בכל שלב לקחנו איבר שלא נמצא בכדור ברדיוס δ, ולכן כל אחד בהכרח מרוחק מהשני ביותר מ־δ.
[19] הסדרה אפילו אינה סדרת קושי, וכל תת־סדרה שלה אינה קושי.
[20] ז"א, מתקיים תנאי ג' במשפט שהוכחנו.

5.2 משפט היינה בורל

עד כה, הוכחנו כי עבור מרחב מטרי M ותת מרחב Y, אז Y מרחב קומפקטי $\Longleftarrow$ Y חסומה וסגורה ב־M. האם ההפוך מתקיים? כלומר, אם תת־מרחב מטרי Y חסום וסגור ב־M גורר כי הוא תת־מרחב קומפקטי?

נוכיח כי ב־$\mathbb{R}^n$ אכן כך.

משפט 5.9 (היינה בורל) נניח $M \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי, M הוא תת־מרחב קומפקטי $\iff$ M חסום וסגור ב־$\mathbb{R}^n$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) הוכחנו זאת עבור מרחבים מטריים כלליים, ובפרט זה נכון עבור $\mathbb{R}^n$.

■

($\Rightarrow$) נוכיח כי M קומפקטית. לפי המשפט מן החלק הקודם, זה שקול להוכיח כי M קומפקטית סדרתית.

תהי סדרה $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ב־M. לפי הנתון, M חסום, ולכן בהכרח קיים $c > 0$ כך ש־$\|v_k\| \leq c$. נניח כי $v_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$. מכאן נקבל שכל רכיב $|x_i^k| \leq c$.

לפי משפט בולצאנו ווירשטראס ל־$\mathbb{R}$, קיימת תת־סדרה מתכנסת ברכיב הראשון $\{x_1^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. עבור אותם n_k נקבל תת־סדרה $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. נמשיך כך במשך n צעדים ונקבל תת־סדרה $\{v_{k_m}\}$ של $\{v_k\}$.

נקבל ש־$\{v_{k_m}\}$ סדרה של n־יות שמתכנסות רכיב רכיב, ולפי תיאור התכנסות סדרות ב־$\mathbb{R}^n$, נקבל שהיא מתכנסת ב־$\mathbb{R}^n$. אך בגלל שהסדרה כולה ב־M, והנחנו כי M סגורה, נקבל כי הסדרה מתכנסת ב־M. ולכן, הוכחנו קומפקטיות סדרתית, וזה שקול לקומפקטיות. ■

חלק II

מרחבים טופולוגיים

עד כה, דיברנו על מרחבים מטריים, והתחלנו לנסח טענות במרחבים מטרים אך ורק בשימוש בקבוצות פתוחות. כעת, ניפטר מן המושג של מטריקה ונדבר אך ורק על קבוצות פתוחות, במושג חדש הקרוי מרחב טופולוגי.

6 מרחבים טופולוגיים

6.1 הגדרת מרחב טופולוגי

הגדרה 6.1 מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ הוא קבוצה X ומשפחה $\mathcal{T}$ של תתי־קבוצות של X המקיימת:

(א) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ב) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש־$U_\alpha \in \mathcal{T}$ לכל $\alpha \in I$, אזי גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

(ג) אם $U_1, \dots, U_n$ אוסף סופי של קבוצות כך ש־ $U_i \in \mathcal{T}$ לכל $1 \le i \le n$, אזי גם $\bigcap_{1 \le i \le n} U_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ נקראית הטופולוגיה על X, והקבוצות ב־$\mathcal{T}$ ייקראו קבוצות פתוחות ב־X.

6.2 דוגמאות ובניות למרחבים טופולוגים ומטריזביליות

דוגמא 6.2 ניתן כאן דוגמאות למרחבים טופולוגיים,

X מ"מ ו־$\mathcal{T}$ אוסף הקבוצות הפתוחות המוגדרות באמצעות המטריקה d.[21]

X קבוצה כלשהי, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. זו נקראית הטופולוגיה הטריוויאלית על X.

X קבוצה כלשהי, $\mathcal{T} = P(X) = 2^X$. זו נקראית הטופולוגיה הדיסקרטית על X.

$X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{even}, \mathbb{Z}_{odd}\}$.

תהי X קבוצה. נגדיר $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ is finite or } A = \emptyset\}$.[22]

הגדרה 6.3 מ"ט $(X, \mathcal{T})$ ייקרא מטריזבילי אם יש מטריקה d על X כך ש־d משרה את $\mathcal{T}$.

טענה 6.4 הטופולוגיה הדיסקרטית היא מטריזבילית.

הוכחה. המטריקה הדיסקרטית משרה את הטופולוגיה הדיסקרטית. ■

טענה 6.5 אם ב־X יש יותר מנקודה אחת, אזי הטופולוגיה הטריוויאלית איננה מטריזבילית.

[21] במקרה זה, $\mathcal{T}$ נקראית הטופולוגיה המושרה ע"י d.

[22] טופולוגיה זו נקראית המטריקה הקו־סופית.

הוכחה. נראה זאת ע"י כך שנראה כי כל מטריקה על X משרה טופולוגיה שאיננה הטופולוגיה הטריוויאלית. ניקח $a \neq b \in X$ כלשהם. נסמן $r = d(a,b)$, ונביט בקבוצה $U = B(a,r)$. זוהי קבוצה פתוחה[23].
כמו כן, $U \neq \emptyset$ כי $a \in B(a,r)$, ו־ $U \neq X$ כי $b \notin B(a,r)$. ■

טענה 6.6 יהי (M,d) מ"מ. אזי, לכל $a \in M$ הקבוצה $\{a\}$ סגורה.

כלומר, הקבוצה $M - \{a\}$ פתוחה. מכאן שיש לפחות $|M|$ קבוצות פתוחות, כי האוסף $\{M - \{a\}\}_{a \in M}$ הוא מעוצמה זאת. הוכחת הטענה מושארת כתרגיל.

7 פונקציות רציפות

7.1 פונקציות רציפות במרחב טופולוגי

הגדרה 7.1 יהי $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ שני מרחבים טופולוגיים. $f : X \to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $U \in \mathcal{S}$ מתקיים ש־$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

במילים, לכל $U \subseteq Y$ פתוחה, מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־X. כלומר, תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

טענה 7.2 אם $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2),(Z,\mathcal{T}_3)$ מרחבים טופולוגיים, $f : X \to Y$ רציפה, $g : Y \to Z$ רציפה, אזי $g \circ f : X \to Z$ גם כן רציפה.

הוכחה. תהי $U \subseteq Z$ פתוחה. אזי,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

g רציפה, ולכן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב־Y. ולכן, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ רציפה כי f רציפה. ■

טענה 7.3 הטענות הבאות מתקיימות,

(א) לכל מ"ט $(X,\mathcal{T})$ העתקת הזהות $Id : X \to X$ רציפה.

(ב) יהיו X,Y מ"ט, $b \in Y$. נגדיר $K_b : X \to Y$ לכל $x \in X$ ע"י

$$K_b(x) = b$$

אזי K_b רציפה.

הוכחה. (א) תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב־X. אזי $Id^{-1}(U) = U$ ולכן כמובן פתוחה ב־X.

■

(ב) תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. אזי

$$K_b^{-1}(U) = \begin{cases} X & b \in U \\ \emptyset & b \notin U \end{cases}$$

ולכן בהכרח התמונה ההפוכה פתוחה. ■

[23] כי היא כדור פתוח.

7.2 רציפות בנקודה

הגדרה 7.4 יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ ו־$a\in X$. אזי, f תיקרא רציפה ב־a אם לכל סביבה U של $f(a)$ ב־Y יש סביבה V של a ב־X כך ש־$f(V)\subseteq U$.

טענה 7.5 $f:X\to Y$ רציפה $\iff$ היא רציפה בכל נקודה $a\in X$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח f רציפה. תהי $a\in X$. תהי U סביבה של $f(a)$. אזי, $f^{-1}(U)$ סביבה של A ומתקיים $f(f^{-1}(U))\subseteq U$.

($\Rightarrow$) תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. נראה ש־$f^{-1}(U)$ פתוחה ב־X. תהי $a\in f^{-1}(U)$, כלומר, $f(a)\in U$, ולכן קיימת V_a סביבה של a כך ש־$f(V_a)\subseteq U$. ולכן, $V_a\subseteq f^{-1}(U)$. מן הלמה השימושית נובע כי

$$\bigcup_{a\in f^{-1}(U)} V_a = f^{-1}(U)$$

ולכן פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. ■

7.3 תתי־מרחבים

הגדרה 7.6 יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט, ותהי $A\subseteq X$. טופולוגיית "תת־המרחב" על A מוגדרת באופן הבא: נגדיר אוסף $\mathcal{S}\subseteq P(A)$ באופן הבא,

$$\mathcal{S}=\{U\subseteq A \mid \exists V\in\mathcal{T}\ : U=V\cap A\}$$

נוכיח כעת כי תת המרחב אכן מוגדר היטב.

טענה 7.7 $\mathcal{S}$ אכן טופולוגיה על A.

הוכחה. (א) $\emptyset\in\mathcal{S}$ כי $\emptyset=\emptyset\cap A$, ו־$A\in\mathcal{S}$ כי $A=A\cap X$.

■

(ב) נניח $\{U_\alpha\}$ אוסף כך שלכל α, $U_\alpha\in\mathcal{S}$. כלומר, לכל α יש $V_\alpha\in\mathcal{T}$ כך ש־$U_\alpha=V_\alpha\cap A$. אזי

$$\bigcup U_\alpha=\bigcup (V_\alpha\cap A)=(\bigcup V_\alpha)\cap A\in\mathcal{S}$$

כנדרש.

■

(ג) נניח $U_1,\dots,U_n\in\mathcal{S}$. כלומר, לכל i יש $V_i\in\mathcal{T}$ כך ש־$U_i=V_i\cap A$. ולכן,

$$\bigcap_{i=1}^n U_i=\bigcap_{i=1}^n (V_i\cap A)=\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right)\cap A\in\mathcal{S}$$

כנדרש. ■

הגדרה 7.8 בהינתן $A \subseteq X$, העתקת ההכלה מוגדרת כ־$i : A \to X$ כך ש־$i(a) = a$ לכל $a \in A$.

טענה 7.9 אם X מ"ט ו־$A \subseteq X$ תת־מרחב, אזי העתקת ההכלה $i : A \to X$ רציפה.

הוכחה. תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב־X.

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

ולכן זו פתוחה ב־A. ■

הגדרה 7.10 בהינתן $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ מוגדרת פונקציית הצמצום $f |_A : A \to Y$ ע"י $f |_A (a) = f(a)$. מתקיים כי $f |_A = f \circ i$.

טענה 7.11 אם $f : X \to Y$ רציפה, $A \subseteq X$, אזי $f |_A : A \to Y$ רציפה.

הוכחה. $f |_A = f \circ i$ ולכן רציפה. ■

משפט 7.12 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$ רציפה, ו־$f(X) \subseteq B \subseteq Y$. אזי, ניתן להגדיר $\hat{f} : X \to B$, $\hat{f}(x) = f(x)$. אזי גם $\hat{f}$ רציפה.

הוכחה. תהי $U \subseteq B$ פתוחה ב־B. צ"ל כי $\hat{f}^{-1}(U)$ פתוחה ב־X. U פתוחה ב־B פירושו שקיימת $V \subseteq Y$ פתוחה ב־Y כך ש־$U = V \cap B$.

$$\hat{f}^{-1}(U) = \{x \in X : \hat{f}(x) \in U\} = \{x \in X : f(x) \in U\} = \{x \in X : f(x) \in V\} = f^{-1}(V)$$

וזו פתוחה. הצעד מתקיים כי $f(x) \in B \cap V$, וממילא $f(x) \in B$, ולכן $f(x) \in B \cap V$ אם"ם $f(x) \in V$. ■

למעשה, הטענה היא דו־כיוונית, כי ודאי שאם $\hat{f}$ רציפה (כהעתקה ל־B) אזי f היא רציפה כהעתקה על Y, כי $f = i \circ \hat{f}$.

7.4 קבוצות סגורות

הגדרה 7.13 יהי X מ"ט. $K \subseteq X$ תיקרא סגורה אם K^C פתוחה.

מהגדרת הטופולוגיה נקבל את התכונות הבאות של קבוצות סגורות:

(א) $\emptyset, X$ סגורות.

(ב) אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות, אזי $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.

(ג) אם $S_1, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות, אזי $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ קבוצה סגורה.

טענה 7.14 יהי X מ"ט, ותהי $A \subseteq X$. אזי, $S \subseteq A$ סגורה ב־A אם"ם יש $Q \subseteq X$ סגורה ב־X כך ש־$S = Q \cap A$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי $S \subseteq A$ סגורה ב־A. נסמן C_A כמשלים לפי A, ו־C_X המשלים לפי X. S סגורה ולכן S^{C_A} פתוחה ב־A, ולכן קיימת קבוצה פתוחה U ב־X כך ש־$S^{C_A} = U \cap A$. מכאן, U^{C_X} סגורה ב־X, ומתקיים $S = U^{C_X} \cap A$.[24]

■

($\Rightarrow$) ההוכחה דומה. ■

מסקנה 7.15 טענות נוספות שנוכל לומר על קבוצות פתוחות וסגורות בתתי מרחבים:

אם $U \subseteq A \subseteq X$, אזי אם U פתוחה ב־X אזי U פתוחה ב־A.

אם A בעצמה פתוחה ב־A אז גם הכיוון השני נכון: אם U פתוחה ב־A אז היא פתוחה ב־X.

טענה 7.16 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$. אזי, f רציפה אם"ם לכל $S \subseteq Y$ שסגורה ב־Y מתקיים ש־$f^{-1}(S)$ סגורה ב־X.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי f רציפה. תהי S קבוצה סגורה. לכן, S^C פתוחה, ולכן $f^{-1}\left(S^C\right)$ פתוחה ב־X. אך מכיוון ש־$f^{-1}\left(S^C\right) = \left(f^{-1}(S)\right)^C$ ולכן נקבל כי $f^{-1}(S)$ סגורה.

■

($\Rightarrow$) תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. אזי, U^C סגורה, ולכן $f^{-1}(U^C)$ סגורה. מכאן נקבל כי $(f^{-1}(U))^C = f^{-1}(U^C)$ ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה, ולכן f רציפה ■

[24] הוכחה זו מושארת כתרגיל. רמז: הכלה דו־כיוונית.

8 הומאומורפיזמים

8.1 פונקציה פתוחה וסגורה

באופן דומה בו באלגברה ע"מ להראות שיוויון מוחלט של מבנה, הגדרנו את המושג של איזומורפיזם. כעת, נגדיר את המושג השקול בטופולוגיה, ההומאומורפיזם.

הגדרה 8.1 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$.

(א) f נקראית פתוחה אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה, גם $f(U)$ פתוחה.

(ב) f נקראית סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה גם $f(S)$ סגורה.

משפט 8.2 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$. אזי, התנאים הבאים על f שקולים,

(א) f חח"ע ועל, רציפה, וגם $f^{-1} : Y \to X$ רציפה.

(ב) f חח"ע, על, רציפה ופתוחה.

(ג) f חח"ע, על, רציפה וסגורה.

(ד) f חח"ע, על ולכל $E \subseteq X$, E פתוחה $\iff$ $f(E)$ פתוחה.

(ה) f רציפה וקיימת $g : Y \to X$ רציפה כך ש־$g \circ f = \mathrm{Id}$, $f \circ g = \mathrm{Id}$.

הוכחה. ההוכחה מושארת כתרגיל. ■

8.2 הגדרת הומאומורפיזם

הגדרה 8.3 (הומאומורפיזם) f המקיימת את התנאים השקולים הנ"ל נקראית הומאומורפיזם.

דוגמא 8.4 ניתן דוגמא למצב בו f חח"ע, על ורציפה, אך f^{-1} אינה רציפה. עבור הפונקציה

$$\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (X, \mathcal{T}_{trivial})$$

היא רציפה, שהרי כל תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה לפי $\mathcal{T}_{trivial}$ היא בהכרח פתוחה ב־$\mathcal{T}_{disc}$, כי כל קבוצה ב־$\mathcal{T}_{disc}$ פתוחה, אבל זה לא יתקיים ב־f^{-1}.

הערה 8.5 אם d_1, d_2 שתי מטריקות על אותה קבוצה M אזי d_1, d_2 שקולות $\iff$ $\mathrm{Id} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ הומאומורפיזם.
אם נתונות שתי טופולוגיות $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ על קבוצה X, אזי $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ הומאומורפיזם.

משפט 8.6 (א) כל הקטעים הפתוחים למינהם ב־$\mathbb{R}$ הומאומורפים זה לזה.

$$(-\infty, \infty) \quad (-\infty, a) \quad (a, \infty) \quad (a, b)$$

(א) כל הקטעים החצי פתוחים ב־$\mathbb{R}$ הומאומורפים זה לזה.

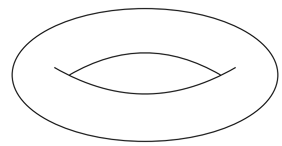
$$(-\infty, a] \quad [a, \infty) \quad (a, b] \quad [a, b)$$

(ג) כל הקטעים הסגורים הומאומורפים זה לזה.

$$[a, b]$$

8.3 מוטיבציה

דוגמאות למוטיבציה. במשך הקורס, נשאל את עצמו בהינתן שני מרחבים טופולוגיים, האם הם הומאומורפיים. למשל, האם הספירה הדו־מימדית $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, ו"גלגל הים", הטורוס



הומאומורפים זה לזה.

בהמשך נראה כי $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$, ובקורסים מתקדמים יותר נראה כי $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^n$, ונענה על השאלה הכללית $\mathbb{R}^n \overset{?}{\cong} \mathbb{R}^m$.

נחזור להוכחת המשפט **הוכחה.** (א) נוכיח כי הקטעים מהצורה הבאה הומאומורפים $(a, b) \cong (c, d)$. ניקח את הפונקציה הליניארית כך ש־$f(a) = c$, $f(b) = d$. הפונקציה היא חח"ע, על וגם ההפוכה שלה ליניארית ורציפה.

עבור הקטעים מהסוג $(a, \infty) \cong (b, \infty)$, נבצע את פונקציית ההזזה $x \mapsto x + (b - a)$.

כמו כן, $(-\infty, 0) \cong (0, \infty)$ עם $x \mapsto -x$. ולכן הראנו כי הקטעים הפתוחים מצד $-\infty$ הומאומורפים לאלו הפתוחים מצד ∞.

כעת, נראה כי $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong \mathbb{R}$. נשתמש בפונקציה $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. זו וההפיכה שלה רציפות, חח"ע ועל.

מה שנותר כדי להוכיח סופית את כל השקילויות הוא כי $(0, \frac{\pi}{2}) \cong (0, \infty)$, כאשר ניתן להשתמש בפונקציה $\tan|_{(0, \frac{\pi}{2})}$.

■

(ב) ניתן להוכיח בעזרת אותן הפונקציות.

■

(ג) כנ"ל. ■

8.4 דוגמאות

דוגמא 8.7 ניתן דוגמא להעתקה חח"ע ועל רציפה אך ההפיכה אינה רציפה.

$$f : [0, 2\pi) \to S^1$$

כאשר

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

אם ניקח את הקבוצה $[0, 1)$, היא פתוחה ב־$[0, 2\pi)$, אך $f([0, 1))$ אינה פתוחה ב־S^1, שכן עבור הנקודה $(1, 0)$, כל סביבה שלה תכיל נקודה היוצאת מן החלק המכוסה ע"י $[0, 1)$. מכאן הרי ש־f^{-1} אינה רציפה.

ניתן להוכיח זאת גם עם סדרה מתכנסת ב־S^1 שהפעלת הפונקציה ההפוכה עליה לא תתכנס ב־$[0, 2\pi)$.

9 סגור ופנים של קבוצה

9.1 סגור של קבוצה במרחב טופולוגי

הגדרה 9.1 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. נגדיר את הסגור של A, המסומן ב־$\overline{A}$, להיות $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \\ S \text{ closed}}} S$.

מסקנה 9.2 התכונות הבאות מתקיימות:

(א) $A \subseteq \overline{A}$.

(ב) $\overline{A}$ סגורה.

(ג) אם $A \subseteq S$ ו־S סגורה אז $\overline{A} \subseteq S$.

מכאן נוכל להסיק כי $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה ה"מינימלית" שמכילה את A.

9.1.1 אפיון הסגור של קבוצה

טענה 9.3 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. אזי $p \in \overline{A} \iff$ לכל סביבה U של p מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח $p \in \overline{A}$. תהי U סביבה של p.
נניח בשלילה כי $U \cap A = \emptyset$. אזי, U^C קבוצה סגורה, ו־$A \subseteq U^C$, ולכן $\overline{A} \subseteq U^C$, ולכן $p \in U^C$ בסתירה לכך ש־U סביבה של p.

■

($\Rightarrow$) נניח כי $p \notin \overline{A}$. אזי, $(\overline{A})^C$ סביבה של p שזרה ל־A. ■

דוגמא 9.4 $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

טענה 9.5 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. אזי $\overline{A} = A \iff A$ סגורה.

הוכחה. מושארת כתרגיל. ■

9.2 פנים של קבוצה

הגדרה 9.6 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. הפנים של A שמסומן $\mathring{A}$ מוגדר כך

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ open}}} U$$

מסקנה 9.7 התכונות הבאות מתקיימות:

(א) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

(ב) $\overset{\circ}{A}$ פתוחה.

(ג) אם $U \subseteq A$ פתוחה אזי $U \subseteq \overset{\circ}{A}$.

כלומר, $\overset{\circ}{A}$ היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת ב־A.

ע"י מעבר למשלימים, נסיק כי $\overset{\circ}{A} = \left(\overline{(A)^C}\right)^C$

הערה 9.8 A פתוחה $\iff \overset{\circ}{A} = A$.

9.3 צפיפות

הגדרה 9.9 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$ תיקרא צפופה ב־X אם $\overline{A} = X$.

ניסוח אחר אומר כי A צפופה ב־X $\iff$ כל קבוצה פתוחה לא ריקה חותכת את A.

סימון. יהי X מ"ט, $A \subseteq B \subseteq X$. ניתן להביט בסגור של A ב־X אותו נסמן $\overline{A}^X$, וניתן להביט בסגור של A ב־B אותו נסמן ב־$\overline{A}^B$.

טענה 9.10 $\overline{A}^B = \overline{A}^X \cap B$.

הוכחה.

$$\overline{A}^B = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \subseteq B \\ S \text{ closed in } B}} S = \bigcap_{\substack{A \subseteq Q \\ Q \text{ closed in } X}} Q \cap B =$$

$$= \left(\bigcap_{\substack{Q \subseteq X \\ Q \text{ closed in } X}} Q \right) \cap B = \overline{A}^X \cap B$$

כאשר הצעד השני חוקי כי $A \subseteq Q \cap B \iff A \subseteq Q$. ■

דוגמא 9.11 $X = \mathbb{R}$, $B = (0,1)$, $A = (0, \frac{1}{2})$. נקבל כי

$$\overline{A}^X = [0, \tfrac{1}{2}] \quad \overline{A}^B = (0, \tfrac{1}{2}]$$

דוגמא 9.12 $(0,1)\cap\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

$$\overset{\circ}{A}^X=\emptyset$$
$$\overset{\circ}{A}^B=A$$

טענה 9.13 $\overset{\circ}{A}^X\subseteq\overset{\circ}{A}^B$.

הוכחה. אם $U\subseteq A$ פתוחה ב־X ודאי U פתוחה ב־B. לכן האוסף המשתתף באיחוד מגדיר את $\overset{\circ}{A}^B$ מכיל את האוסף המשתתף באיחוד המגדיר את $\overset{\circ}{A}^X$. ∎

הגדרה 9.14 השפה של A מוגדרת כ־$\overline{A}\backslash\overset{\circ}{A}$.

הערה 9.15 $A\subseteq B\subseteq X$. אזי A צפופה ב־B אס"ם $\overline{A}^B=B$ אס"ם $\overline{A}^X\cap B=B$ אס"ם $B\subseteq\overline{A}^X$.

9.4 רציפות באמצעות כיסויים פתוחים וסגורים

הגדרה 9.16 כיסוי פתוח של X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות ב־X כך ש־$X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$.

משפט 9.17 יהיו X,Y מ"ט. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, $f:X\to Y$ פונקציה. אזי, f רציפה $\iff$ $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha\in I$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) אם f רציפה, ולכן מכאן ברור כי $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha\in I$.

∎

($\Rightarrow$) נניח $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha\in I$. נוכיח ש־f רציפה. לשם כך, תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. נוכיח כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

טענה. $f^{-1}(U)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$. **הוכחה.** ($\subseteq$) יהי $x\in f^{-1}(U)$. כלומר, $f(x)\in U$. קיים α כך ש־$x\in U_\alpha$, ולכן $f|_{U_\alpha}(x)\in U$, כלומר $x\in f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$.

($\supseteq$) יהי $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$. אזי, יש $\alpha\in I$ כך ש־$x\in f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$. כלומר, $f|_{U_\alpha}(x)\in U\implies f(x)\in U$ ולכן $x\in f^{-1}(U)$. ∎

כעת, כיוון ש־$f|_{U_\alpha}$ רציפה, $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה ב־U_α. אולם U_α פתוחה ב־X ולכן $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה ב־X, ולכן נקבל מן הטענה כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־X כאיחוד של קבוצות פתוחות ב־X. ∎

משפט 9.18 נניח $S_1,\dots S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות ב־X כך ש־$X=S_1\cup\dots\cup S_n$. אזי, $f:X\to Y$ רציפה $\iff$ $f|_{S_i}:S_i\to Y$ רציפה לכל $1\leq i\leq n$.

הוכחה. זהה להוכחת המשפט הקודם. ∎

דוגמא 9.19 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת כך

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ \sin x & x\ge 0\end{cases}$$

לפי המשפט הקודם זו רציפה. שימו לב, לא ניתן לערבב בין הפתוחות לסגורות! לדוגמא,

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x\ge 0\end{cases}$$

10 קשירות

10.1 הגדרת קשירות

הגדרה 10.1 מ"ט X נקרא קשיר אם לא קיימות $U,V\subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$X=U\cup V$.

נציג הגדרה שקולה,

הגדרה 10.2 X קשיר $\iff$ לא קיימות קבוצות $K,L\subseteq X$ סגורות, זרות ולא ריקות כך ש־$X=K\cup L$. וכן: X קשיר $\iff$ לא קיימת A כך ש־$\emptyset\neq A\neq X$ כך ש־A פתוחה וגם סגורה.

10.2 תכונת ערך הביניים

משפט 10.3 נאמר שמ"ט X מקיים את תכונת ערך הביניים אם לכל פונקציה רציפה $f:X\to\mathbb{R}$ ולכל $a,b\in X$, אם $f(a)<t<f(b)$ אז יש $c\in X$ כך ש־$t=f(c)$.

דוגמא 10.4 $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ערך הביניים.

משפט 10.5 X מקיים את תכונת ערך הביניים $\iff$ X קשיר.

הוכחה. $(\Rightarrow)$ נניח בכיוון ההפוך כי X אינו מקיים את תכונת ערך הביניים. כלומר, קיימת $f:X\to\mathbb{R}$ וקיימים $a,b,\in X$ וקיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$f(a)<t<f(b)$$

ולכל $x\in X$, $f(x)\neq t$.

נגדיר $U=f^{-1}((t,\infty))$, $V=f^{-1}((-\infty,t))$. אזי, U,V פתוחות[25], לא ריקות[26], וזרות[27], ואיחודן כל X[28], ולכן X לא קשיר.

[25] כי f רציפה.
[26] כי $a\in V,b\in U$.
[27] כי $(-\infty,t),(t,\infty)$ זרות.
[28] וזאת כי הנחנו שלכל $x\in X$, $f(x)\neq t$.

■

($\Leftarrow$) נניח בכיוון ההפוך כי X לא קשיר. ולכן, יהיו U,V פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$X = U \cup V$. נגדיר $f : X \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

זאת פונקציה רציפה לפי משפט מן החלק הקודם. מכאן נובע כי X לא מקיים את תכונת ערך הביניים. ■

דוגמא 10.6 $\mathbb{Q}$ אינו קשיר. ניקח

$$U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$
$$V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$$

משפט 10.7 $\mathbb{R}$ קשיר.

הוכחה. השקילות שהוכחנו קודם, יחד עם משפט ערך הביניים מחשבון אינפיניטסימלי. ■

משפט 10.8 X קשיר $\iff$ לא קיימת פונקציה רציפה מ־X על מרחב דיסקרטי בן שתי נקודות.

הוכחה. זהה לשקילות שהוכחנו קודם. ■

משפט 10.9 יהיו X,Y מ"ט. X קשיר, $f : X \to Y$ רציפה ועל Y. אזי Y קשיר.

הוכחה. נניח בשלילה כי Y לא קשיר. כלומר, קיימות $U,V \subseteq Y$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$Y = U \cup V$.
נביט בקבוצות $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$.
בגלל ש־f רציפה, הן פתוחות, הן זרות[29], ולא ריקות[30].
נשים לב כי אכן מתקיים $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$ וזאת בסתירה לקשירות X. ■

מסקנה 10.10 יהיו X,Y מ"ט, X קשיר ו־$f : X \to Y$ רציפה. אזי, $f(X)$ מרחב קשיר.

הוכחה. ע"י צמצום הטווח נקבל פונקציה $f : X \to f(X)$ והיא גם על. במילים, תמונה רציפה של מרחב קשיר היא מרחב קשיר. ■

---

[29] כי $U \cap V = \emptyset$.
[30] כי f על.

10.3 אפיון קשירות

נניח שאנו מעוניינים להראות שמרחב טופולוגי כלשהו X קשיר, והצלחנו רק להראות שאיזשהם תתי־מרחבים של X הם קשירים. מתי נוכל להסיק מכך ש־X כולו קשיר?

למה 10.11 (הלמה הקטנה) יהי X מ"ט. יהיו U,V קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות כך ש־$X = U \cup V$, ונניח $A \subseteq X$ ת"מ קשיר. אזי $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$.

הוכחה. נניח בשלילה שלא. אזי, $A \cap U \neq \emptyset$, ו־$A \cap V \neq \emptyset$. אזי הזוג

$$A \cap U, A \cap V$$

סותרים את קשירות A. ■

טענה 10.12 (טענה 1) יהי X מ"ט. אזי, X קשיר $\iff$ לכל $a,b \in X$ יש תת־מרחב קשיר A כך ש־$a,b \in A$.

הוכחה. ($\Rightarrow$) נניח בשלילה ש־X לא קשיר. אזי יש U,V פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$X = U \cup V$. ניקח $a \in U, b \in V$. אזי, מההנחה, קיים תת מרחב $A \subseteq X$ קשיר כך ש־$a,b \in A$. מצד שני, מן הלמה הקטנה $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$, בסתירה.

■

($\Leftarrow$) ניקח $A = X$. ■

טענה 10.13 (טענה 2) אם $A,B \subseteq X$ קשירים, $A \cap B \neq \emptyset$, אזי $A \cup B$ קשיר.

הוכחה. נניח בשלילה כי $A \cup B$ לא קשיר. אזי, יש שתי קבוצות U,V פתוחות ב־$A \cup B$, זרות ולא ריקות כך ש־$U \cup V = A \cup B$. אזי, מן הלמה הקטנה נובע שעבור A ו־$A \cup B$, מתקיים $A \subseteq V$ או $A \subseteq U$, ובאותו אופן, $B \subseteq U$ או $B \subseteq V$.
האם ייתכן ש־$A \subseteq U$ וגם $B \subseteq U$? התשובה לכך היא לא, כי אז $A \cup B \subsetneq U \subseteq A \cup B$. מכאן, בה"כ $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, וזאת סתירה לכך ש־$A \cap B \neq \emptyset$. ■

משפט 10.14 יהי X מ"ט. אזי X קשיר $\iff$ לכל $a,b \in X$ יש אוסף סופי $A_1,\ldots,A_n$ של תתי־מרחבים קשירים של X כך ש־

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, \ldots, A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset$$

ו־$a \in A, b \in A_n$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) מתקיים עבור השרשרת X, וטענה 1.

■

($\Rightarrow$) לפי טענה 2, $A_1 \cup A_2$ קשיר, ולכן גם $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קשיר, וכך הלאה. בסופו של דבר, נקבל ש־$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ קשיר. מתקיים $a,b \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$, ולכן מטענה 1 נקבל ש־$X$ קשיר. ■

מסקנה 10.15 אם X מ"ט, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של תתי־מרחבים קשירים כך ש־$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, אזי X קשיר.

הוכחה. נשתמש בטענה 1. יהיו $a,b \in X$. יש $\alpha,\beta \in I$ כך ש־$a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$. מתקיים $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$[31], ומכאן שמתקיים התנאי של המשפט הקודם עם השרשרת A_α, A_β. ■

משפט 10.16 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$ קבוצה צפופה שהיא מרחב קשיר. אזי X קשיר.

הוכחה. נניח בשלילה ש־X אינו קשיר. אזי, יש U,V קבוצות פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$U \cup V = X$.

נביט ב־$U \cap A, V \cap A$. הן פתוחות ב־A, זרות, איחודן A. כמו כן, שתיהן לא ריקות, כי A צפוף ב־X. ולכן A לא קשיר, בסתירה. ■

משפט 10.17 הקטעים למינהם ב־$\mathbb{R}$ הם קשירים. למשל

$$[a,b] \quad (a,b] \quad (-\infty,b] \quad (a,\infty)$$

הוכחה. כבר הוכחנו ש־$(-\infty,\infty)$ קשיר. $(-\infty,\infty)$ הומאומורפי לכל הקטעים הפתוחים למינהם $(-\infty,a), (a,b), (a,\infty)$ ולכן אלה גם קשירים. מדוע $[a,b)$ קשיר? נביט ב־$(a,b) \subseteq [a,b)$. (a,b) צפופה ב־$[a,b)$[32] ולכן קשיר. כמובן שבאותו האופן $[a,b]$. ■

טענה 10.18 $[a,b)$, (c,d) לא הומאומורפים.

הוכחה. נניח בשלילה כי יש הומאומורפיזם $h : [a,b) \to (c,d)$. כלומר, h רציפה וקיימת g רציפה כך ש־$g : (c,d) \to [a,b)$ כך ש־$g \circ h = \mathrm{Id}_{[a,b)}$, $h \circ g = \mathrm{Id}_{(c,d)}$.

נביט ב־$h|_{(a,b)} : (a,b) \to (c,d)$. אז ע"י צמצום הטווח נקבל כי

$$h|_{(a,b)}\,(a,b) \to (c,d) \backslash \{h(a)\}$$

וקיבלנו פונקציה רציפה ממרחב קשיר על מרחב לא קשיר, בסתירה. ■

מן ההוכחה הקודמת, נסיק טענה כללית על הומאומורפיזמים:

טענה 10.19 נניח $h : X \to Y$ הומאומורפיזם. כלומר, h רציפה וקיימת g רציפה $g : Y \to X$ כך ש־$g \circ h = \mathrm{Id}_X$, $h \circ g = \mathrm{Id}_Y$

$$h|_{X \backslash A} : X \backslash A \to Y$$

ואחרי כן צמצום הטווח

$$h|_{X \backslash A} : X \backslash A \to Y \backslash h(A)$$

נקבל הומאומורפיזם, כי

$$g|_{Y \backslash h(A)} : Y \backslash h(A) \to X \backslash A$$

וההרכבה בשני הכיוונים תהיה $\mathrm{Id}_{Y \backslash h(A)}$, $\mathrm{Id}_{X \backslash A}$. כלומר, לכל $A \subseteq X$, $h|_A : A \to h(A)$ הוא הומאומורפיזם.

[31] כי החיתוך של כולם לא ריק.

[32] וזאת כי $[a,b) \subseteq \overline{(a,b)}^{\mathbb{R}}$.

10.4 מרכיבי קשירות

הגדרה 10.20 יהי X מ"ט. נגדיר על X את יחס השקילות הבא. עבור $a, b \in X$ נאמר ש־$a \sim b$ אם קיים תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש־$a, b \in A$. זהו אכן יחס שקילות, נוכיח זאת:

1. **רפלקסיביות.** מתקיים $a \sim a$, עבור תת־המרחב $\{a\}$, אין אפשרות לקרוע את המרחב לשתי קבוצות פתוחות זרות שאינן ריקות, ולכן קשיר.
2. **סימטריות.** אם $a \sim b$ ברור ש־$b \sim a$, נובע מיידית מן ההגדרה.
3. **טרנזטיביות.** אם $a \sim b$, אז קיים תת־מרחב A_1 קשיר שמכיל את שניהם, ו־$b \sim c$, אז קיים תת־מרחב A_2 המכיל את שניהם. בהכרח $A_1 \cup A_2$ מכיל את a, c, והוא קשיר כי $b \in A_1 \cap A_2$, וממשפט לעיל נובע ש־$A_1 \cup A_2$ קשיר, ומכיל את a, c ולכן $a \sim c$.

מחלקות השקילות של היחס $\sim$ נקראים "מרכיבי הקשירות" של X.

תכונות.

1. אם $A \subseteq X$ קשיר אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של X[33].
2. רכיבי הקשירות הם קשירים. נוכיח זאת.
נניח כי C מרכיב קשירות של X, ונניח $a, b \in C$. כלומר, $a \sim b$ ולכן יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש־$a, b \in A$.
מתכונה 1 נובע כי A מוכל באחד מרכיבי הקשירות, וכיוון ש־$A \cap C \neq \emptyset$[34] נקבל ש־$A \subseteq C$. ולכן, לכל $a, b \in C$ קיים תת־מרחב $A \subseteq C$ קשיר כך ש־$a, b \in A$, ולכן C קשיר.
מכאן שמרכיבי הקשירות הם תתי־המרחבים הקשירים המקסימלים ב־X[35]. בפרט, אם C רכיב קשירות ו־$C \subset A$, אזי A לא קשיר.
3. מרכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות. נוכיח זאת.
יהי C רכיב קשירות. אזי, C צפוף ב־$\overline{C}$, ולכן $\overline{C}$ קשיר. ולכן מכיוון ש־$C \subseteq \overline{C}$, נקבל $C = \overline{C}$, כלומר C סגור.
4. אם יש רק מספר סופי של מרכיבי קשירות אז הם גם פתוחים. נוכיח זאת.
נניח $C_1, \ldots, C_n$ הם מרכיבי הקשירות של X. מתכונה 3 נובע שכל C_i קבוצה סגורה. מכאן ש

$$C_j = \left(\bigcup_{k \neq j} C_k \right)^C$$

פתוחה, כי האיחוד הסופי סגור ולכן המשלים פתוח.

דוגמא 10.21 מרחב בו מספר מרכיבי הקשירות אינסופי והרכיבים פתוחים בכל זאת:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) \subseteq \mathbb{R}$$

---

[33] מתקיים כי אז לכל $a, b \in A$ בהכרח $a \sim b$, ולכן כל נקודות A מוכלות במחלקת שקילות יחדיו.
[34] כי a, b נמצאים שם.
[35] כלומר, כל תת־מרחב קשיר מוכל באחד מהם.

טענה 10.22 עבור $\mathbb{Q}$ מרכיבי הקשירות הם כולם מהצורה $\{p\}$.

הוכחה. נניח $A \subseteq \mathbb{Q}$ קשיר ובו לפחות שתי נקודות $a \neq b \in A$. קיים בהכרח t אי־רציונלי כך ש־$a < t < b$. אזי $V = (t, \infty) \cap A$, $U = (-\infty, t) \cap A$ מראים כי A אינו קשיר. ■

11 קשירות מסילתית

11.1 הגדרת קשירות מסילתית

הגדרה 11.1 יהי X מ"ט. מסילה ב־X היא פונקציה רציפה

$$\varphi : [0,1] \to X$$

אם $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ אנו נאמר שהמסילה היא מ־a אל b.

הגדרה 11.2 יהי X מ"ט. X נקרא קשיר מסילתית אם לכל $a, b \in X$ יש מסילה מ־a ל־b.

משפט 11.3 אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה. לכל $a, b \in X$ נמצא ת"מ קשיר $A \subseteq X$ כך ש־$a, b \in A$. אכן, בהינתן $a, b \in X$, יש מסילה $\varphi : [0,1] \to X$ כך ש־$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.

ניקח $A = \varphi([0,1])$. A קשיר כי הוא תמונה רציפה של המרחב הקשיר $[0,1]$. $a, b \in A$ וזה לכל a, b. לכן לפי טענה מן החלק בקשירות, X קשיר. ■

משפט 11.4 אם X קשיר מסילתית, $f : X \to Y$ רציפה ועל Y, אז Y קשיר מסילתית.

הוכחה. יהיו $a, b \in Y$. כיוון ש־f על קיימים $x, y \in X$ כך ש־$f(x) = a, f(y) = b$. כיוון ש־X קשיר מסילתית, יש $\varphi : [0,1] \to X$ רציפה כך ש־$\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

אזי, $f \circ \varphi : [0,1] \to Y$ היא מסילה שמקיימת $f \circ \varphi(0) = a, f \circ \varphi(1) = b$. ■

מסקנה 11.5 אם X קשיר מסילתית, $f : X \to Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

הגדרה 11.6 יהיו $\varphi, \psi : [0,1] \to X$ שתי מסילות, ונניח ש־$\varphi(1) = \psi(0)$. נגדיר מסילה חדשה $\varphi * \psi : [0,1] \to X$, המוגדרת באופן הבא $\varphi * \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

ו־$\varphi * \psi$ נקראית השרשור של φ ו־ψ.

נשים לב כי הפונקציה מוגדרת היטב[36]. כדי שזאת תהיה מסילה צריך להראות ש־$\varphi * \psi$ רציף.
$X \to [0, \frac{1}{2}]$ ממופה ע"י $t \mapsto \varphi(2t)$, וזוהי הרכבה של שתי פונקציות רציפות

$$t \mapsto 2t$$
$$q \mapsto \varphi(q)$$

ובאופן דומה עבור $[\frac{1}{2}, 1]$. ולכן סה"כ $\varphi * \psi$ רציפה כי אלו קבוצות סגורות ב־$[0,1]$.

11.2 מרכיבי קשירות מסילתית

הגדרה 11.7 בהינתן מ"ט X נגדיר על X יחס שקילות $\equiv$. עבור $a, b \in X$ נאמר כי $a \equiv b$ אם יש מסילה מ־a אל b. זהו אכן יחס שקילות.

1. **רפלקסיביות.** מסילה קבועה
2. **סימטריות.** נניח $a \equiv b$. כלומר, קיימת מסילה $\varphi : [0,1] \to X$, נגדיר $\overline{\varphi} : [0,1] \to X$ ע"י
$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$$
אזי מתקיים $\overline{\varphi}(0) = b, \overline{\varphi}(1) = a$ ולכן $b \equiv a$.
3. **טרנזטיביות.** נניח $a \equiv b$. אז יש מסילה φ בין a ל־b. נניח כי $b \equiv c$, אז יש מסילה בין b ל־c. אז $\varphi * \psi$ היא מסילה מ־a אל c.

למחלקות השקילות של יחס שקילות זה אנו קוראים מרכיבי הקשירות המסילתית של X.

תכונות.

1. נניח $A \subseteq X$ קשיר מסילתית, אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית של X. נוכיח זאת.
יהיו $a, b \in A$. A קשיר מסילתית ולכן יש מסילה $\varphi : [0,1] \to A$ כך ש־$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. נסמן ב־$i : A \to X$ את העתקת ההכלה. אזי $i \circ \varphi : [0,1] \to X$ היא מסילה ב־X מ־a ל־b, ולכן $a \equiv b$. כלומר, כל שתי נקודות ב־A שקולות זו לזו ולכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית.
2. מרכיבי הקשירות המסילתית הם קשירים מסילתית. נוכיח זאת.
יהי C מרכיב קשירות מסילתית, ויהיו $a, b \in C$. אנו צריכים להראות שיש מסילה $\varphi : [0,1] \to C$ כך ש־$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.
$a, b \in C$ ולכן $a \equiv b$ ולכן יש מסילה $\psi : [0,1] \to X$ כך ש־$\psi(0) = a, \psi(1) = b$, אולם $\psi([0,1])$ קשיר מסילתית כי $[0,1]$ קשיר מסילתית[37]. ולכן, $\psi([0,1])$ מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית
$$\psi([0,1]) \cap C \neq \emptyset$$
ובהכרח המרכיב הנ"ל הוא C עצמו, כלומר $\psi([0,1]) \subseteq C$, וע"י צמצום הטווח ל־C נקבל $\varphi : [0,1] \to C$ ועדיין $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.
נותר להראות שהמרחב $[0,1]$ קשיר מסילתית. נראה שכל הקטעים הפתוחים למינהם קשירים מסילתית. נראה זאת עבור $[0,1]$ אך אותה ההוכחה זהה לכל קטע מכל סוג.
יהיו $a, b \in [0,1]$. נגדיר $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ע"י $\varphi(t) = (1-t)a + tb$.

[36] מהתנאי $\varphi(1) = \psi(0)$.
[37] זאת נראה בסוף.

לסיכום, בדומה למרכיבי קשירות, מרכיבי הקשירות המסילתית הם תתי־המרחבים הקשירים מסילתית המקסימליים והם מהווים חלוקה של X.

דוגמא 11.8 ניתן כעת דוגמא למרחב קשיר שאינו קשיר מסילתית.

$$X = \underbrace{\{(x,y) : x = 0, -1 \le y \le 1\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{(x,y) \mid x = \frac{1}{n}, -1 \le y \le 1\right\}}_{B}$$

$$\underbrace{\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{odd}} \left\{(x,y) : y = 1, \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}\right\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{even}} \left\{(x,y) \mid y = -1, \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}\right\}}_{B}$$

ניתן להוכיח כי אכן X אינו קשיר מסילתית אך קשיר.

משפט 11.9 $\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית.

הוכחה. עבור $v, w \in \mathbb{R}^n$, נגדיר $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ע"י $\varphi(t) = (1-t)v + tw$. ■

טענה 11.10 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אז A קשיר $\iff$ A קשיר מסילתית, ומרכיבי הקשירות והקשירות המסילתית של A מתלכדים והם פתוחים.

הוכחה. נוכח זאת בסדר הפוך. נוכיח כי כל מרכיבי הקשירות המסילתית הם פתוחים. A פתוחה ולכן לכל $a \in A$ יש כדור $B(a,r)$ המוכל בה. הכדור קשיר מסילתית כי הישר בין a אל $b \in B(a,r)$ כלשהו הוא מסילה, ולכן נקבל לכל נקודה ברכיב הקשירות המסילתית יש כדור המוכל בה, ולכן פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ ולכן פתוחה ב־A.

כעת, כל מרכיב קשירות מסילתית מוכל במרכיב קשירות, ומרכיב קשירות הוא איחוד מרכיבי הקשירות המסילתית שמוכלים בו.

יהי C מרכיב קשירות ונניח בשלילה שהוא מכיל יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד.

$$C = \bigcup_{a\in I} D_\alpha$$

כאשר D_α מרכיבי קשירות מסילתית, ונניח $|I| > 1$. ניקח $\beta \in I$ ונקבל הצגה

$$C = D_\beta \cup \left(\bigcup_{\alpha\neq\beta} D_\alpha\right)$$

בסתירה לכך ש־C קשיר.

מכאן, אם רכיבי הקשירות והקשירות המסילתית מתלכדים, ואחד מהם קשיר או קשיר מסילתית, הרי שנקבל את הטענה כדרוש. ■

12 קומפקטיות

12.1 קומפקטיות במרחב טופולוגי

הגדרה 12.1 אוסף קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ נקרא כיסוי פתוח של X אם

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha = X$.
2. כל U_α פתוח.
3. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי, תת כיסוי פירושו $J \subseteq I$ כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha = X$.

תת כיסוי סופי הוא תת כיסוי שעבורו J היא קבוצה סופית.

הגדרה 12.2 יהי X מ"ט. אזי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X קיים תת־כיסוי סופי.

דוגמא 12.3 המרחב $\mathbb{R}^n$ אינו קומפקטי. למשל, עבור הכיסוי $\{B(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ אין תת־כיסוי סופי.

הגדרה 12.4 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. כיסוי פתוח של A ב־X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תתי קבוצות פתוחות ב־X כך ש־$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supseteq A$.

תת־כיסוי הוא $J \subseteq I$ כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \supseteq A$.

משפט 12.5 יהי X מ"ט כלשהו, $A \subseteq X$. אזי A קומפקטי $\iff$ לכל כיסוי פתוח של A ב־X יש תת־כיסוי סופי.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח A קומפקטי ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח ב־X. אזי האוסף $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של A. A קומפקטי ולכן יש $J \subseteq I$ סופי כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap A) = A$ ומכאן שעבור אותו J $\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \supseteq A$.

■

($\Rightarrow$) נניח שהתנאי על כיסויים ב־X מתקיים, ונוכיח ש־A מרחב קומפקטי. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A[38]. מהגדרת הטופולוגיה על A לכל $\alpha \in I$ יש קבוצה $U_\alpha \subseteq X$ פתוחה ב־X כך ש־$V_\alpha = U_\alpha \cap A$. מכאן,

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supseteq A$$

ומהתנאי, קיימת $J \subseteq I$ סופית כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \supseteq A$. אזי

$$\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\right) \cap A = A$$

■

---

[38] כלומר, $V_\alpha \subseteq A$, V_α פתוחים ב־A, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha = A$.

משפט 12.6 יהיו X,Y מ"ט, X קומפקטי, $f:X\to Y$ רציפה ועל. אזי Y קומפקטי.

הוכחה. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של Y. נמצא לו תת־כיסוי סופי. האוסף $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, וזאת כי

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) = f^{-1}(Y) = X$$

כעת, X קומפקטי ולכן יש $J\subseteq I$ סופית כך ש־$\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(U_\alpha) = X$. כעת, נוכיח כי עבור אותה קבוצה סופית J מתקיים

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = Y$$

תמיד נכון ש־$f(f^{-1}(U_\alpha))\subseteq U_\alpha$, $\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(U_\alpha) = X$ ולכן

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha\in J} f(f^{-1}(U_\alpha)) \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$$

וזאת כי f על. ולכן $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = Y$. ■

מסקנה 12.7 אם הכל כנ"ל מלבד הדרישה ש־f על, אז נכון ש־$f(X)$ קומפקטי.

משפט 12.8 יהי X מ"ט קומפקטי. $A\subseteq X$ סגורה ב־X. אזי A קומפקטי.

הוכחה. נשתמש בתנאי שהוכחנו לקומפקטיות של תת־מרחב. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A ב־X[39].
אזי, האוסף הבא הוא כיסוי פתוח של X $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\cup\{A^C\}$.

X קומפקטי, לכן יש לכיסוי הנ"ל תת־כיסוי סופי. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־A^C משתתף בתת־הכיסוי הסופי.

$$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}, A^C$$

אזי $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}$ כיסוי של A, כלומר $U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}\supseteq A$. ■

12.2 מרחב האוסדורף

הגדרה 12.9 יהי X מ"ט. אנו נאמר ש־X הוא האוסדורף[40] אם לכל $a\neq b\in X$ יש קבוצות פתוחות זרות U,V כך ש־$a\in U,\, b\in V$.

דוגמא 12.10 כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.

[39] כלומר, $U_\alpha\subseteq X$, U_α פתוחים ב־X, $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.

[40] או T_2.

הוכחה. יהי M מרחב מטרי. יהיו $a \neq b \in M$. נסמן $r = \frac{1}{2}d(a,b)$. מתקיים $r > 0$ כי $a \neq b$. ונקבל סביבות $B(a,r), B(b,r)$ זרות. ■

הגדרה 12.11 מרחב נקרא T_1 אם כל נקודון $\{p\}$ הוא קבוצה סגורה.

טענה 12.12 $T_2 \implies T_1$.

הוכחה. נניח X הוא T_2[41]. אזי לכל $x \neq p$ יש U_x, V_x פתוחות זרות כך ש־$x \in V_x, p \in U_x$. בפרט $p \notin V_x$.
כלומר, $V_x \subseteq \{p\}^C$.
לכן $\{p\}^C$ פתוחה[42]. ■

משפט 12.13 יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$, אזי A גם כן האוסדורף.

הוכחה. יהי $a \neq b \in A$. כיוון ש־X האוסדורף יש $U, V \subseteq X$ זרות, פתוחות ב־X כך ש־$b \in V$, $a \in U$.
הקבוצות $U \cap A, V \cap A$ זרות, פתוחות ב־A ומקיימות $a \in U \cap A,\ b \in V \cap A$. ■

משפט 12.14 יהי X מ"ט האוסדורף, $A \subseteq X$ קומפקטי. אזי A סגורה ב־X.

הוכחה. לכל $p \notin A$ אנו נמצא סביבה U כך ש־$U \subseteq A^C$, ולכן מן הלמה השימושית[43] נקבל ש־A^C פתוחה.

לכל $a \in A$ יש סביבות זרות U_a, V_a ב־X, $p \in V_a$, $a \in U_a$. $\{U_a\}_{a \in A}$ הוא כיסוי פתוח של A ב־X. A קומפקטי ולכן יש אוסף סופי $a_1, \ldots, a_n$ כך ש־$\bigcup_{1 \le i \le n} U_{a_i} \supseteq A$.

נסמן $V = \bigcap_{1 \le i \le n} V_{a_i}$. נוכיח כי $p \in V \subseteq A^C$. ודאי $p \in V$ כי $p \in V_{a_i}$ לכל a_i.

נותר להראות כי $V \subseteq A^C$. בהכרח מתקיים $V_{a_i} \subseteq U_{a_i}^C$, ולכן

$$\bigcap_{1 \le i \le n} V_{a_i} \subseteq \bigcap_{1 \le i \le n} U_{a_i}^C = \left(\bigcup_{1 \le i \le n} U_{a_i} \right)^C \subseteq A^C$$

כאשר ההכלה האחרונה נובעת מכך ש־$\bigcup_{1 \le i \le n} U_{a_i} \supseteq A$. ■

תזכורת. $f : X \to Y$ נקראית סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה ב־X מתקיים ש־$f(S)$ סגורה ב־Y.

משפט 12.15 יהיו X, Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף, ותהי $f : X \to Y$ רציפה. אזי f סגורה.

הוכחה. תהי $S \subseteq X$ סגורה.

1. X קומפקטי לכן S קומפקטי[44].

---

[41] כלומר האוסדורף.
[42] כאיחוד של קבוצות פתוחות V_x, בעזרת הלמה השימושית בעמוד 9.
[43] בעמוד 9
[44] כי S סגורה ב־X.

2. $f(S)$ קומפקטי[45].
3. Y האוסדורף, $f(S)$ קומפקטי, לכן $f(S)$ סגורה ב־Y.

■

מסקנה 12.16 יהיו X,Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף. $f : X \to Y$ רציפה, חח"ע ועל. אזי f היא הומאומורפיזם.

הגדרה 12.17 יהיו X,Y מ"ט. העתקה $f : X \to Y$ נקראית שיכון אם אחרי צמצום הטווח ל־$f(X)$ ההעתקה $f : X \to f(X)$ היא הומאומורפיזם[46].

דוגמא 12.18 העתקת ההכלה היא תמיד שיכון[47].

משפט 12.19 יהיו X,Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף, $f : X \to Y$ רציפה וחח"ע. אז f היא שיכון.

הוכחה. $f(X)$ האוסדורף כי הוא תת־מרחב של Y. ■

13 בסיסים לטופולוגיה

הגדרה 13.1 יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של X נקרא בסיס עבור $\mathcal{T}$ אם

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.
2. לכל $U \subseteq \mathcal{T}$ ולכל $a \in U$ יש $V \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in V \subseteq U$.

הקבוצות ב־$\mathcal{B}$ נקראות קבוצות בסיס.

ניסוח שקול באמצעות הלמה השימושית[48] אומר כי כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

טענה 13.2 הכדורים הפתוחים ב־$\mathbb{R}^n$ מהצורה

$$\left\{B(q,r) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\right\}$$

הם בסיס לטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה. תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $p \in U$. U פתוחה ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$B(p,\varepsilon) \subseteq U$.
קיים $a \in \mathbb{Q}^n$ כך ש־$d(p,a) < \frac{\varepsilon}{2}$. ניקח $r \in \mathbb{Q}$ כך ש־

$$d(p,a) < r < \frac{\varepsilon}{2}$$

ואז

$$p \in B(a,r) \subseteq B(p,\varepsilon) \subseteq U$$

■

[45] תמונה רציפה של S שהוא קומפקטי.
[46] בפרט f רציפה וחח"ע אך היא מקימת יותר מזה.
[47] אם $i : A \to X$ ההכלה, אז אחרי צמצום הטווח $\mathrm{Id} : A \to A$.
[48] הלמה השימושית בעמוד 9

הערה 13.3 מכאן נובע שעוצמת הטופולוגיה על $\mathbb{R}$ היא $\aleph$.

מסקנה 13.4 יהי X, $(Y,\mathcal{T})$ מ"ט. $\mathcal{B}$ בסיס ל־$\mathcal{T}$. אזי לכל פונקציה $f: X \to Y$, f רציפה $\iff$ לכל קבוצת בסיס $V \in \mathcal{B}$ מתקיים ש־$f^{-1}(V)$ פתוחה ב־X.

הוכחה. ($\Leftarrow$) כיוון אחד ברור כי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

■

($\Rightarrow$) נניח שמתקיים התנאי הנ"ל לכל $V \in \mathcal{B}$ ותהי $U \subseteq Y$ קבוצה פתוחה כלשהי. אזי

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

כאשר $V_\alpha \in \mathcal{B}$ לכל α. מתקיים

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\text{Open}}$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה. ■

טענה 13.5 $f: X \to Y$ פתוחה $\iff$ לכל קבוצת בסיס $V \in \mathcal{B}$[49] מתקיים ש־$f(V)$ פתוחה ב־Y.

הוכחה. באותו אופן כיוון שגם $f\left(\bigcup U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$. ■

תרגיל. יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ו־$\mathcal{B}$ בסיס ל־$\mathcal{T}$, ויהי $A \subseteq X$. אזי אוסף הקבוצות

$$\{V \cap A : V \in \mathcal{B}\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה של A[50].

משפט 13.6 תהי X קבוצה. $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ אוסף של תתי קבוצות. אזי $\mathcal{B}$ היא בסיס לטופולוגיה על X $\iff$ $\mathcal{B}$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

1. (א) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$
2. (ב) לכל $U,V \in \mathcal{B}$ ולכל $a \in U \cap V$ קיים $W \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in W \subseteq U \cap V$.

ניסוח שקול באמצעות הלמה השימושית[51]: לכל $U,V \in \mathcal{B}$ מתקיים ש־$U \cap V$ הוא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה $\mathcal{T}$. אזי כיוון ש־$X \in \mathcal{T}$ ו־$\mathcal{B}$ בסיס ל־$\mathcal{T}$ אזי X הוא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$ ולכן ודאי איחוד של כל קבוצות $\mathcal{B}$.

וכן אם $U,V \in \mathcal{B}$ אז $U,V \in \mathcal{T}$ ולכן $U \cap V \in \mathcal{T}$ ולכן $U \cap V$ היא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

---

[49] $\mathcal{B}$ בסיס ל־X.

[50] הטופולוגיה המושרה על A מ־X.

[51] בעמוד 9.

■

($\Rightarrow$) בהינתן אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות המקיימת את א' וב', נגדיר אוסף תתי־קבוצות $\mathcal{T}$. נראה ש־$\mathcal{T}$ טופולוגיה ו־$\mathcal{B}$ בסיס עבור $\mathcal{T}$.

נבנה את $\mathcal{T}$ באופן הבא

בנייה. $U \subseteq X$ יהיה שייך ל־$\mathcal{T}$ אם לכל $a \in U$ יש $V \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in V \subseteq U$.

בנייה'. $U \subseteq X$ יהיה שייך ל־$\mathcal{T}$ אם הוא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

ברור מהגדרת בסיס שאם $\mathcal{T}$ היא טופולוגיה אז $\mathcal{B}$ בסיס עבורה ולכן נותר רק להראות ש־$\mathcal{T}$ טופולוגיה.

נוכיח כי $\mathcal{T}$ אכן טופולוגיה.

1. $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש־$U_\alpha \in \mathcal{T}$ לכל α. נוכיח כי $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$. יהי $a \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ אזי יש $\alpha_0 \in I$ כך ש־$a \in U_{\alpha_0}$. $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ פירושו שיש $V \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in V \subseteq U_{\alpha_0}$. ולכן $a \in V \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.
3. אם נוכיח שסגור תחת חיתוכים של שתי קבוצות, באינדוקציה ינבע שסגור תחת איחודים <u>סופיים</u> כלשהם.
יהיו $U, V \in \mathcal{T}$. נוכיח כי $U \cap V \in \mathcal{T}$. בהינתן $a \in U \cap V$, $U \in \mathcal{T}$ ולכן יש $U_0 \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in U_0 \subseteq U$,
כמו כן $V \in \mathcal{T}$ ולכן יש $V_0 \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in V_0 \subseteq V$.
מהתנאי על האוסף $\mathcal{B}$ יש $W \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in W \subseteq U_0 \cap V_0$ ולכן $a \in W \subseteq U \cap V$ וזה לכל $a \in U \cap V$ ולכן $U \cap V \in \mathcal{T}$.

ולכן $\mathcal{T}$ טופולוגיה. ■

מסקנה 13.7 התנאי הבא על $\mathcal{B}$ הוא תנאי מספיק אך **לא הכרחי** לכך ש־$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X,

1. X מתקבל כאיחוד הקבוצות ב־$\mathcal{B}$.
2. אם $U, V \in \mathcal{B}$ אז $U \cap V \in \mathcal{B}$.

14 מכפלה סופית של מרחבים טופולוגיים

תזכורת. עבור קבוצות $A_1, \ldots, A_n$, מוגדרת הקבוצה

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

הגדרה 14.1 יהיו $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ n מרחבים טופולוגיים. אנו רוצים להגדיר על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. נסמן

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \mid U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n\}$$

טענה 14.2 $\mathcal{B}$ אוסף של תתי קבוצות של $X_1 \times \cdots \times X_n$ שמקיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה על $X_1 \times \cdots \times X_n$.

הוכחה. נוכיח את שני הסעיפים של התנאי המספיק.

(א) האיחוד הוא הכל כי $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}$.

■

(ב) אם $U_1 \times \cdots \times U_n, V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{B}$, כלומר $U_1 \in \mathcal{T}_1, V_1 \in \mathcal{T}_1$, $U_2 \in \mathcal{T}_2, V_2 \in \mathcal{T}_2$ וכך הלאה. אזי

$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}$$

■

הטופולוגיה $\mathcal{T}$ ש־$\mathcal{B}$ הוא בסיס עבורה נקראית טופולוגיית המכפלה, והיא תהיה הטופולוגיה שתמיד נקרא על מכפלה כנ"ל.

תרגילים.

1. יהיו $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ מ"ט. יהי $\mathcal{B}_1$ בסיס ל־$\mathcal{T}_1$, $\mathcal{B}_2$ בסיס ל־$\mathcal{T}_2$, ..., $\mathcal{B}_n$ בסיס ל־$\mathcal{T}_n$. אזי אוסף הקבוצות

$$\{V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n : V_i \in \mathcal{B}_i\}$$

היא בסיס לטופולוגיה של $X_1 \times \cdots \times X_n$.[52]

2. הטופולוגיה על $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ מתלכדת עם הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$.

3. $X_1, \ldots, X_n, Y_1 \times \cdots \times Y_m$, $n+m$ מרחבים טופולוגיים. הוכיחו כי הטופולוגיות

$$(X_1 \times \cdots \times X_n) \times (Y_1 \times \cdots \times Y_m)$$

ו־

$$X_1 \times \cdots \times X_n \times Y_1 \times \cdots \times Y_m$$

הגדרה 14.3 בהינתן קבוצות $A_1, \ldots, A_n$ ישנן n העתקות טבעיות

$$p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$$

המוגדר כך

$$p_i\left((a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)\right) := a_i$$

כאשר p_i נקראת ההטלה על הרכיב ה־i.

[52] כלומר, לטופולוגיית המכפלה על $X_1 \times \cdots \times X_n$ שהגדרנו כעת.

טענה 14.4 יהיו $X_1, \dots X_n$ מ"ט. אזי העתקות ההטלה

$$p_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$$

הן רציפות ופתוחות.

הוכחה. תהי $U \subseteq X_i$ פתוחה.

$$p_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times U \times \cdots \times X_n$$

וזו קבוצת בסיס בפרט קבוצה פתוחה.

נוכיח ש־p_i פתוחה. מטענה קודמת מספיק להראות שתמונה של קבוצת בסיס היא קבוצה פתוחה.

$$p_i(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_i \times U_{i+1} \times \cdots \times U_n) = U_i$$

וזו פתוחה. ■

משפט 14.5 יהיו $X_1, \dots, X_n$ ו־Y מרחבים טופולוגיים. תהי $f : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$. אזי f רציפה $\iff$ $p_i \circ f$ רציפה לכל $1 \le i \le n$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) אם f רציפה, אז לכל i, $p_i \circ f$ רציפה כי p_i רציפה.

■

($\Rightarrow$) נניח שלכל i, $p_i \circ f$ רציפה ונוכיח ש־f רציפה.

מטענה קודמת מספיק לבדוק שתמונה הפוכה של קבוצת בסיס היא קבוצה פתוחה. תהי $U_1 \times \cdots \times U_n$ קבוצת בסיס לטופולוגיה של $X_1 \times \cdots \times X_n$[53].

מתקיים

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n\right) &= \{g \in Y : f(y) \in U_1 \times \cdots \times U_n\} = \\ &= \{y \in Y : p_1 \circ f(y) \in U_1, p_2 \circ f(y) \in U_2, \dots, p_n \circ f(y) \in U_n\} = \\ &= \bigcap_{1 \le i \le n} \{y \in Y : p_i \circ f(y) \in U_i\} = \bigcap_{1 \le i \le n} \underbrace{(p_i \circ f)^{-1}(U_i)}_{Open} \end{aligned}$$

■

משפט 14.6 יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט ו־Y עוד מ"ט, ונניח נתונות n פונקציות רציפות $f_i : Y \to X_i$. אזי הן מגדירות ביחד פונקצייה

$$\underset{1 \le i \le n}{(f_i)} : Y \to X_i$$

המוגדרת כך:

$$\underset{1 \le i \le n}{(f_i)}(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots f_n(y))$$

אזי אם כל הפונקציות ה־f_i רציפות, גם הפונקציה $(f_i)_{1 \le i \le n}$ רציפה [54].

---

[53] כלומר, U_1 פתוחה ב־X_1, U_2 פתוחה ב־X_2, וכך הלאה...
[54] לפי המשפט הקודם.

15 מכפלות אינסופיות

הגדרה 15.1 יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות. נרצה להגדיר את קבוצת המכפלה שתסומן

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$$

נשים לב כי ניתן לחשוב על המכפלה $A_1\times\cdots\times A_n$ כאוסף כל הפונקציות

$$\{f:\{1,2,\ldots,n\}\to A_1\cup\cdots\cup A_n \mid f(1)\in A_1,\ldots,f(n)\in A_n\}$$

נכליל כעת לאוסף אינסופי.
אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות. נגדיר

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \left\{ f: I\to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \mid \forall\alpha\in I:\ f(\alpha)\in A_\alpha \right\}$$

איברי המכפלה הם פוקציות φ שתחומן I, ולכל $\alpha\in I$: $\varphi(\alpha)\in X_\alpha$.

סימון. נסמן את האיברים כך : $a_\alpha\in X_\alpha$, $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$.

בהינתן אוסף $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של מרחבים טופולוגיים נרצה להגדיר טופולוגיה על הקבוצה $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

הגדרה 15.2 נגדיר אוסף $\mathcal{B}$ הבא של תתי קבוצות של $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

$$\mathcal{B}=\left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha:\ \forall\alpha, U_\alpha\subseteq X_\alpha \text{is open in } X_\alpha \text{and there exists a finite } F\subseteq I \text{such that } \forall\alpha\notin F: U_\alpha = X_\alpha\right\}$$

טענה 15.3 האוסף $\mathcal{B}$ מקיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה.

הוכחה. אכן האיחוד של כל הקבוצות ב־$\mathcal{B}$ הוא כל $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, וכן אם $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\in\mathcal{B}$ פירושו שכל ה־U_α פתוחות ויש $F\subseteq I$ סופית שמחוצה לה $U_\alpha = X_\alpha$, ואם $\prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ פירושו שכל V_α פתוחה ב־X_α ויש $E\subseteq I$ סופית כך שמחוצה לה $V_\alpha = X_\alpha$. אזי

$$\left(\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in I} V_\alpha\right)=\prod_{\alpha\in I}(U_\alpha\cap V_\alpha)\in\mathcal{B}$$

כי מתקיים שלכל $\alpha\notin E\cup F$ כש־$E\cup F$ סופית, $U_\alpha\cap V_\alpha = X_\alpha\cap X_\alpha = X_\alpha$. ■

הטופולוגיה המוגדרת ע"י הבסיס $\mathcal{B}$ נקראית טופולוגית המכפלה, והיא תמיד הטופולוגיה שבה נשתמש עבור מכפלה של מ"ט.

תזכורת. ההטלה $p_\beta:\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\to X_\beta$ מוגדרת כך:

$$p_\beta((a_\alpha)_{\alpha\in I}) = a_\beta$$

משפט 15.4 ההטלות p_β רציפות ופתוחות.

הוכחה. נוכיח כי p_β רציפה. תהי $U \subseteq X_\beta$ פתוחה. נוכיח כי $p_\beta^{-1}(U)$ פתוחה. מתקיים

$$p_\beta^{-1}(U) = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$$

כאשר לכל $\beta \neq \alpha$ מתקיים $V_\alpha = X_\alpha$ ועבור β מתקיים $V_\beta = U$.

■

נוכיח כעת כי p_β פתוחה. מספיק לבדוק שתמונת קבוצות הבסיס היא פתוחה.

$$p_\beta\left(\prod_{\alpha \in I} V_\alpha\right) = V_\beta$$

וזאת פתוחה. ■

משפט 15.5 יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של מ"ט, Y מ"ט, $f : Y \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. אזי f רציפה $\iff$ $p_\alpha \circ f$ רציפה לכל α.

הוכחה. ($\Leftarrow$) אם f רציפה, אז כיוון ש־ p_α רציפה גם $p_\alpha \circ f$ רציפה.

■

($\Rightarrow$) נניח $p_\alpha \circ f$ רציפה לכל α. נראה ש־f רציפה. מספיק להראות שהתמונה ההפוכה של קבוצת בסיס היא פתוחה.

$$f^{-1}\left(\prod_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \left\{y \in Y : f(y) \in \prod_{\alpha \in I} U_\alpha\right\} = \{y \in Y : p_\alpha \circ f(y) \in U_\alpha, \forall \alpha \in I\} =$$

$$= \bigcap_{\alpha \in I} \{y \in Y : p_\alpha \circ f(y) \in U_\alpha\} = \bigcap_{\alpha \in I} (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

זהו חיתוך של אוסף אינסופי של קבוצות פתוחות. אם $\alpha \notin F$ אז $U_\alpha = X_\alpha$ ולכן $(p_\alpha \circ f)^{-1}(X_\alpha) = Y$ ולכן החיתוך הנ"ל שווה

$$= \bigcap_{\alpha \in F} (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

וזה חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה. ■

משפט 15.6 אם $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של מרחבים שכולם האוסדורף. אזי, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ הוא האוסדורף.

הוכחה. יהיו $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \neq (b_\alpha)_{\alpha \in I}$. האיברים שונים, פירוש שקיים אינדקס $\beta \in I$ כך ש־$a_\beta \neq b_\beta$. כיוון ש־X_β הוא האוסדורף, קיימים $U, V \subseteq X_\beta$ פתוחות כך ש־$a_\beta \in U, b_\beta \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

נגדיר $\mathcal{U} = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha$, כאשר

$$U_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \alpha \neq \beta \\ U & \alpha = \beta \end{cases}$$

ונגדיר $\mathcal{V} = \prod_{\alpha\in I} V_\alpha$, כאשר

$$V_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \alpha \neq \beta \\ V & \alpha = \beta \end{cases}$$

מתקיים כי $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ פתוחות[55] וזרות כי

$$\left(\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in I} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in I} (U_\alpha \cap V_\alpha) = \emptyset$$

כי $U_\beta \cap V_\beta = \emptyset$, וכן $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{U}$ ו־$(b_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{V}$. ■

משפט 15.7 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט שכולם קשירים מסילתית. אזי $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קשיר מסילתית.

הוכחה. יהיו $(a_\alpha)_{\alpha\in I}, (b_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. לכל $\alpha \in I$, X_α קשיר מסילתית. לכן יש מסילה $\gamma_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$ כך ש־$\gamma_\alpha(0) = a_\alpha, \gamma_\alpha(1) = b_\alpha$.
נביט ב־

$$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I} : [0,1] \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

כמו במקרה של מכפלה סופית $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$ פירושו פונקציה מ־$[0,1]$ למכפלה $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ המקיימת

$$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}(t) = (\gamma_\alpha(t))_{\alpha\in I}$$

במילים אחרות, זוהי פונקציה $F : [0,1] \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ כך ש־

$$p_\alpha \circ F = \gamma_\alpha$$

ולכן $F = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$ רציפה ומתקיים $F(0) = (a_\alpha)_{\alpha\in I}, F(1) = (b_\alpha)_{\alpha\in I}$. ■

הגדרה 15.8 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט, ויהי $\beta \in I$. לכל $\alpha \neq \beta$ נבחר $a_\alpha \in X_\alpha$. נגדיר העתקה

$$F : X_\beta \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

[55] למעשה הן קבוצות בסיס.

באופן הבא:

$$p_\beta \circ F = \mathsf{Id}_{X_\beta}$$

$$\alpha \neq \beta : p_\alpha \circ F = \text{Constant function to } a_\alpha$$

טענה 15.9 F היא שיכון.

הוכחה. נסמן $Y = F(X_\beta)$. F רציפה כל כל רכיביה רציפים. מתקיים כי $p_\beta|_Y : Y \to X_\beta$ העתקה רציפה ומתקיים

$$\begin{cases} p_\beta|_Y \circ F = \mathrm{Id}_{X_\beta} \\ F \circ p_\beta = \mathrm{Id}_Y \end{cases}$$

■

מסקנה 15.10 אם $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ האוסדורף אז לכל $\beta \in I$ מתקיים X_β האוסדורף.

הוכחה. F הנ"ל היא הומאומורפיזם מ־X_β לתת מרחב Y של $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ והוכחנו שתת־מרחב של מרחב האוסדורף הוא האוסדורף. ■

משפט 15.11 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של מ"ט שכולם קשירים. אזי $\prod X_\alpha$ קשיר.

הוכחה.

שלב א. מכפלת שני מרחבים. יהי X, Y מרחבים קשירים. אזי $X \times Y$ קשיר. **הוכחה.** יהי $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ שתי נקודות. תתי המרחבים:

$$\{x_1\} \times Y$$
$$X \times \{y_2\}$$

אלה שני תתי מרחבים קשירים כי הם תמונות של שיכונים. כעת, מתקיים

$(x_1, y_1) \in \{x_1\} \times Y$.

$(\{x_1\} \times Y) \cap (X \times \{y_2\}) \neq \emptyset$ כי (x_1, y_2) בקבוצה.

$(x_2, y_2) \in X \times \{y_2\}$.

ולכן מצאנו שרשרת של מרחבים קשירים בין $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ולכן סה"כ $X \times Y$ קשיר. ■

שלב ב. נוכיח עבור מכפלה סופית כלשהי. אם $X_1, \dots X_n$ קשירים אזי $X_1 \times \cdots \times X_n$ קשיר. ההוכחה לכך היא באינדוקציה[56].

[56] תוך שימוש בטענה כי $X_1 \times \cdots \times X_n \cong (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$.

■

שלב ג. נבחר נקודה אחת $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ ב־$\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. לכל $F\subseteq I$ סופית נגדיר

$$Y_F=\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$$

כאשר $A_\alpha = X_\alpha$ אם $\alpha\in F$, $A_\alpha=\{a_\alpha\}$ אם $\alpha\notin F$.

טענה. $Y_F\cong \prod\limits_{\alpha\in F} X_\alpha$.

הוכחה. דומה למה שהוכחנו עבור שני מרחבים - $X\times\{y\}\cong X$.

וכמסקנה משלב ב', לכל F סופית, Y_F קשיר.

■

שלב ד. נסמן

$$Z=\bigcup_{\substack{F\subseteq I\\ F\text{ is finite}}} Y_F$$

טענה. Z קשיר. **הוכחה.** כיוון שכל Y_F קשיר, כדי לראות ש־$\bigcup\limits_{F\subseteq I\text{ finite}} Y_F$ קשיר מספיק להראות ש־$\bigcap\limits_{F\subseteq I\text{ finite}} Y_F\neq\emptyset$. ואכן $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ בקבוצה זו. ■

שלב ה. Z צפוף ב־$\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$.

הערה. אם X מ"ט, $A\subseteq X$, $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה של X, אזי A צפוף ב־X $\iff$ לכל $\emptyset\neq V\in\mathcal{B}$ מתקיים $V\cap A\neq\emptyset$.

מספיק לבדוק שלכל קבוצת בסיס $\prod\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, $U_\alpha\subseteq X_\alpha$ ויש $F\subseteq I$ סופי כך שלכל $\alpha\notin F$ $U_\alpha=X_\alpha$.

נוכיח כי $\prod\limits_{\alpha\in I} U_\alpha\cap Z\neq\emptyset$. מספיק להראות ש־$\prod\limits_{\alpha\in I} U_\alpha\cap Y_F\neq\emptyset$ כי $Y_F\subseteq Z$.

כעת, מתקיים כי

$$\left(\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\prod_{\alpha\in I}(U_\alpha\cap A_\alpha)$$

אם $\alpha\in F$ אזי $A_\alpha=X_\alpha$ ולכן $U_\alpha\cap A_\alpha\neq\emptyset$, ואם $\alpha\notin F$ אזי $U_\alpha=X_\alpha$ ולכן $U_\alpha\cap A_\alpha\neq\emptyset$.

■

ולכן סה"כ Z קשיר וצפוף ב־$\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$, ולכן המכפלה קשירה. ■

טענה 15.12 אם Z מ"ט, $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על Z, אזי Z קומפקטי $\iff$ לכל כיסוי של Z ע"י קבוצות מ־$\mathcal{B}$ יש תת־כיסוי סופי.

משפט 15.13 יהיו X, Y מ"ט קומפקטיים. אזי $X \times Y$ קומפקטי[57].

הוכחה. יהי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות בסיס[58] כך ש־

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha = X \times Y$$

צ"ל שקיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש־

$$\bigcup_{1 \le i \le n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i} = X \times Y$$

לכל $a \in X$ נביט בתת־המרחב $\{a\} \times Y \subseteq X \times Y$. $\{a\} \times Y \cong Y$ ולכן $\{a\} \times Y$ קומפקטי. האוסף $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של $\{a\} \times Y$ ב־$X \times Y$.
יתרה מזאת, אם נביט באוסף

$$J = \{\alpha \in I : a \in U_\alpha\}$$

אזי גם $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ כיסוי של $\{a\} \times Y$ ב־$X \times Y$, כי אם $a \notin U_\alpha$ אז $U_\alpha \times V_\alpha$ זר ל־$\{a\} \times Y$ ולכן ניתן להשמיט קבוצה זו ועדיין כל נקודות $\{a\} \times Y$ יכוסו.

$\{a\} \times Y$ קומפקטי לכן יש לכיסוי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ תת כיסוי סופי. כלומר, יש $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש־$\{a\} \times Y \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$ וגם $a \in U_{\alpha_i}$ לכל $1 \le i \le n$.

נשים לב שבהכרח $\bigcup_{1 \le i \le n} V_{\alpha_i} = Y$, כי בהינתן $y \in Y$, הנק' (a, y) נמצאת באחת הקבוצות $U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$, כלומר בפרט $y \in V_{\alpha_i}$.

נסמן $W_a = \bigcap_{1 \le i \le n} U_{\alpha_i}$. W_a פתוחה וכן $a \in W_a$, וכן מתקיים

$$W_a \times Y \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$$

זה נובע משיוויון כללי על קבוצות ששלכל שני אוספים $\{A_\alpha\}_{\alpha \in K}$, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in K}$ מתקיים

$$\left(\bigcap_{\alpha \in K} A_\alpha\right) \times \left(\bigcup_{\alpha \in K} B_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} (A_\alpha \times B_\alpha)$$

שכן אם (x, y) באגף שמאל, יש $\beta \in K$ כך ש־$y \in B_\beta$. עבור אותו ה־β מתקיים $x \in A_\beta$ (כי $x \in A_\alpha$ לכל $\alpha \in K$) ולכן $(x, y) \in A_\beta \times B_\beta$.

---

[57] כמסקנה, לכל אוסף סופי $X_1, \ldots, X_n$ של מ"ט קומפקטיים גם $X_1 \times \cdots \times X_n$ קומפקטי.
[58] כלומר, $U_\alpha \subseteq X$ פתוחה ב־X, $V_\alpha \subseteq Y$ פתוחה ב־Y לכל α.

מכאן

$$W_a \times Y = \left(\bigcap_{1\le i\le n} U_{\alpha_i}\right) \times \left(\bigcup_{1\le i\le n} V_{\alpha_i}\right) \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$$

כך נעשה לכל $a \in X$ וכך כל $a \in X$ יגדיר סביבה W_a. לכל $a \in X$, W_a מוכל באיחוד סופי מבין קבוצות הכיסוי.

האוסף $\{W_a\}_{a\in X}$ הוא כיסוי פתוח של X. X קומפקטי, ולכן יש $a_1, a_2, \ldots, a_l$ כך ש־

$$\bigcup_{1\le j\le l} W_{a_j} = X$$

לכל $1 \le j \le l$ יש מספר סופי של קבוצות מהצורה $U_\alpha \times V_\alpha$ כך ש־$W_{a_j} \times Y$ מוכל באיחודן.

כאשר נצרף את כל הקבוצות $U_\alpha \times V_\alpha$ הללו עבור $1 \le j \le l$ נקבל אוסף סופי של קבוצות מהכיסוי המקורי שאיחודן הוא כל $X \times Y$. ולכן $X \times Y$ קומפקטי. ■

15.1 תכונות נוספות של מכפלות אינסופיות

הגדרה 15.14 יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מ"ט, ולכל $\alpha \in I$ פונקציה רציפה $f_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha$. נגדיר

$$\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right) : \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

המוגדר כך, בהינתן $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$, $\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right)(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ הוא האיבר ב־$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ שהרכיב ה־α הוא $f_\alpha(y_\alpha)$. ניתן לסמן זאת כך, $\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right)((y_\alpha)_{\alpha\in I}) = (f_\alpha(y_\alpha))_{\alpha\in I}$.

כדי להראות ש־$\prod_{\alpha\in I} f_\alpha$ רציפה, צריך לבדוק שכל אחד מהרכיבים שלה רציף, והרכיב ה־β הוא

$$(y_\alpha)_{\alpha\in I} \mapsto f_\beta(y_\beta)$$

זו רציפה כי היא הרכבה של פונקציות.

$$\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \xrightarrow{\text{proj}} Y_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_\beta$$

כיוון שכל β ראינו שהרכיב ה־β של $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha$ הוא רציף ולכן הפונקציה $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha$ רציף.

משפט 15.15 יהי X מ"ט כלשהו. $f, g : X \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. אזי $f \cdot g$ רציפה, $f + g$ רציפה. אם f לא מתאפסת בשום מקום אז $\frac{1}{f}$ רציפה.

דוגמא 15.16 ניקח $f\cdot g$, ראשית, הפונקציה $m:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $(x,y)\mapsto x\cdot y$ רציפה[59]

את $f\cdot g$ ניתן להציג כהרכבה

$$X\xrightarrow{(f,g)}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{m}\mathbb{R}$$

$$x\mapsto(f(x),g(x))\mapsto f(x)\cdot g(x)$$

16 איחודים זרים

יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. ראשית נחליף את כל הנקודות בכל X_α כך שכולם יהיו **זרים זה לזה.** למשל, ניתן להחליף כל X_α ב־$X_\alpha\times\{\alpha\}$:

$$x\in X_\alpha\rightsquigarrow(x,\alpha)$$

ולכן אחרי ביצוע פעולה זו אנחנו מניחים ש־X_α כולם זרים. נגדיר כעת מ"ט $\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$ באופן הבא,

הגדרה 16.1 הטופולוגיה על $\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$ היא מעל קבוצת הנקודות $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$, ותת־קבוצה של X תיקרא פתוחה אם היא מהצורה

$$\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$$

כאשר $U_\alpha\subseteq X_\alpha$, U_α פתוחה ב־X_α.

דוגמא 16.2 המרחב $\mathbb{R}\coprod\mathbb{R}$ הוא שני ישרים, ויש תת־מרחב ב־$\mathbb{R}^2$ שהומאומורפי ל־$\mathbb{R}\coprod\mathbb{R}$.

מהבנייה נובע שלכל β, $X_\beta\subseteq\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$, וגם הטענה הבאה:

טענה 16.3 העתקת ההכלה $i_\beta:X_\beta\to\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$ היא רציפה ופתוחה, ובפרט היא שיכון.

לכל $f:\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha\to Y$, f רציפה $\iff$ $f\circ i_\alpha$ רציפה לכל α. בלשון של צמצומים: $f:\coprod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha\to Y$, f רציפה $\iff$ $f|_{X_\alpha}$ רציפה לכל α.

[59] זהו פולינום ב־x,y.

17 מרחבי מנה

הגדרה 17.1 יהי X מ"ט, ויהי $\sim$ יחס שקילות על X. נסמן ב־$\widehat{X}$ את קבוצת מחלקות השקילות. נרצה לבחור טופולוגיה על $\widehat{X}$. קיימת ההעתקה הטבעית $\rho : X \to \widehat{X}$ המוגדרת ע"י $\rho(a) = [a]$, כש־$[a]$ היא מחלקת השקילות של a.

נאמר ש־$V \subseteq \widehat{X}$ תחשב פתוחה $\iff$ $\rho^{-1}(V)$ פתוחה ב־X.[60]

תרגיל. האוסף לעיל אכן מהווה טופולוגיה.

משפט 17.2

1. ההעתקה $\rho : X \to \widehat{X}$ רציפה.
2. לכל מ"ט Y ולכל העתקה $f : \widehat{X} \to Y$, f רציפה $\iff$ $f \circ \rho$ רציפה.

הוכחה. (א) תהי $V \subseteq \widehat{X}$ פתוחה, אזי $\rho^{-1}(V)$ פתוחה מהגדרת הטופולוגיה על $\widehat{X}$.[61]

■

(ב) ($\Leftarrow$) אם f רציפה, מן הסעיף הקודם נובע ש־$f \circ \rho$ רציפה.

($\Rightarrow$) נניח ש־$f \circ \rho$ רציפה, תהי $W \subseteq Y$ פתוחה. נוכיח כי $f^{-1}(W)$ פתוחה. ידוע ש־$(f \circ \rho)^{-1}(W)$ פתוחה. אולם

$$(f \circ \rho)^{-1}(W) = \rho^{-1}(f^{-1}(W))$$

הקבוצה $f^{-1}(W) \subseteq \widehat{X}$ מקיימת ש־$\rho^{-1}(f^{-1}(W))$ פתוחה ב־X, מהגדרת הטופולוגיה ב־$\widehat{X}$ נקבל ש־$f^{-1}(W)$ פתוחה. ■

אם $g : X \to Y$ פונקציה רציפה שמכבדת את יחס השקילות, כלומר לכל $a, b \in X$ אם $a \sim b$ אזי $g(a) = g(b)$, אזי g משרה פונקציה $\widehat{g} : \widehat{X} \to Y$ ע"י

$$\widehat{g}([a]) = g(a)$$

נשים לב כי ההגדרה בלתי תלויה בנציג כי g מכבדת את יחס השקילות. מתקיים $g = \widehat{g} \circ \rho$, הנחנו ש־$g$ רציפה, ומהמשפט נובע ש־$\widehat{g}$ רציפה.

דוגמא 17.3 $X = [0,1]$. יחס השקילות הנוצר ע"י $1 \sim 0$. כיצד מגדירים העתקה רציפה

$$\widehat{[0,1]} \to Y$$

היא תמיד מושרת ע"י העתקה רציפה $f : [0,1] \to Y$ המקיימת $f(0) = f(1)$.

$Y = S^1$, $\widehat{g} : \widehat{[0,1]} \to S^1$ רציפה.

$$[0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

[60] דרך אחרת לחשוב על $\rho^{-1}(V)$ היא ש־$\rho^{-1}(V)$ הוא איחוד המחלקות ב־V.

[61] הטופולוגיה שבחרנו על $\widehat{X}$ היא הטופולוגיה המקסימלית שעבורה ρ רציפה.

ואח"כ צמצום הטווח ל־S^1.

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \sin \pi t$$

משרה

$$\widehat{h} : \widehat{[0,1]} \to \mathbb{R}$$

בדוגמאות הנ"ל $\widehat{g}$ חח"ע, $\widehat{[0,1]}$ ולכן $\rho : [0,1] \to \widehat{[0,1]}$ קומפקטי, $\widehat{h}$ אינה חח"ע.

$$\widehat{g} : \widehat{[0,1]} \to S^1$$

רציפה, חח"ע, ועל, S^1 האוסדורף ו־$\widehat{[0,1]}$ קומפקטי, ולכן $\widehat{g}$ הומאומורפיזם.

הערה 17.4 כדי שבכלל תהיה פונקציה g, צריך שכל מחלקה תועתק לאותו מקום (הפונקציה תכבד את יחס השקילות). אם g רציפה, אזי $\widehat{g}$ גם תהיה רציפה. g על $\iff$ $\widehat{g}$ על, ו־$\widehat{g}$ חח"ע אם $g(a) = g(b)$ גורר ש־$a \sim b$.

דוגמא 17.5 על $\mathbb{R}$ נגדיר את יחס השקילות הבא:

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

באלגברה מסמנים את $\widehat{\mathbb{R}}$ הנ"ל ב־$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

נגדיר $k : \mathbb{R} \to S^1$ ע"י

$$k(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

k מכבדת את יחס השקילות. לכן משרה

$$\widehat{k} : \widehat{\mathbb{R}} \to S^1$$

גם הכיוון השני נכון. כלומר, בכל פעם ש־$k(a) = k(b)$, מתקיים ש־$a - b \in \mathbb{Z}$, כלומר $a \sim b$, ולכן $\widehat{k}$ היא חח"ע, היא גם על.

$$\widehat{k} : \widehat{\mathbb{R}} \to S^1$$

רציפה חח"ע ועל.

כמו כן, $\widehat{\mathbb{R}}$ קומפקטי שכן

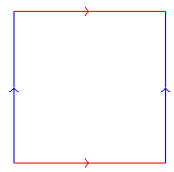
$$\rho|_{[0,10]} : [0,10] \to \widehat{\mathbb{R}}$$

רציפה ועל, $[0,10]$ קומפקטי ולכן $\widehat{\mathbb{R}}$ קומפקטי.

17.1 דוגמאות

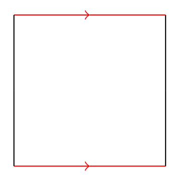
דוגמאות למרחבי מנה. נגדיר מעל הריבוע $[0,1]\times[0,1]$ יחס שקילות. נרשום כאן את הריבוע עם צלעות בצבע מתאים וכיוון מתאים בהתאם ליחס השקילות שנקבע על השפה של הריבוע.

למשל, עבור ההדבקה



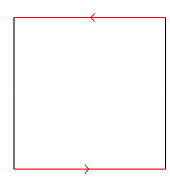
נקבל מרחב שמעכשיו ייקרא **טורוס**.

עבור



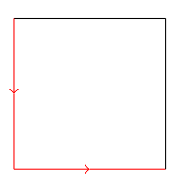
המרחב שייוצר לעיל יהיה גליל.

עבור



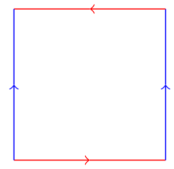
המרחב שיווצר ייקרא **טבעת מביוס**.

עבור



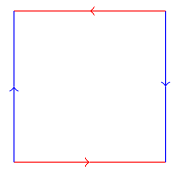
גם נקבל טבעת מביוס.

עבור



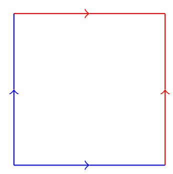
מרחב זה ייקרא **בקבוק קליין**. מרחב זה לא ניתן לשיכון ב-$\mathbb{R}^3$.

עבור



דומה למעגל, נקרא **מישור פרוייקטיבי**, מרחב זה לא ניתן לשיכון ב-$\mathbb{R}^3$.

עבור



נקבל את הספירה S^2.

17.2 העתקות מנה

הגדרה 17.6 יהיו X, Y מ"ט. $f : X \to Y$ נקראית העתקת מנה אם

1. f על.
2. $U \subseteq Y$ פתוחה ב-Y $\iff$ $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

הגדרה 17.7 אם $f : X \to Y$ העתקת מנה, נגדיר יחס שקילות על X באופן הבא

$$a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

טענה 17.8 $f : X \to Y$ העתקת מנה $\iff$ מתקיימים שני התנאים

1. f על.
2. $S \subseteq Y$ סגורה ב־$Y \iff f^{-1}(S)$ סגורה ב־X.

הוכחה. פשוטה[62]. ■

טענה 17.9 הרכבה של העתקות מנה היא העתקת מנה.

הוכחה. יהיו $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ שתי העתקות מנה. אזי,

1. הרכבה של העתקות על היא על.
2. תהי $A \subseteq Z$. אזי A פתוחה $\iff g^{-1}(A)$ פתוחה $\iff f^{-1}(g^{-1}(A))$ פתוחה. אולם, $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$, כלומר, קיבלנו ש־$A$ פתוחה $\iff (g \circ f)^{-1}(A)$ פתוחה.

ולכן $g \circ f$ אכן העתקת מנה. ■

משפט 17.10

1. אם f על, רציפה ופתוחה אז f העתקת מנה.
2. אם f על, רציפה וסגורה אז f העתקת מנה.

הוכחה.

1. תהי $f : X \to Y$ על, רציפה ופתוחה. אזי,
   (א) נתון ש־f על.
   (ב) תהי $A \subseteq Y$ פתוחה. אזי כיוון ש־f רציפה, גם $f^{-1}(A)$ פתוחה. לכיוון השני, תהי קבוצה $A \subseteq Y$ קבוצה המקיימת ש־$f^{-1}(A)$ פתוחה, צ"ל ש־A פתוחה.
   f העתקה פתוחה ולכן $f(f^{-1}(A))$ פתוחה, אולם f היא על, ולכן $f(f^{-1}(A)) = A$, ולכן A פתוחה.
2. תרגיל.

■

מסקנה 17.11 יהי X מ"ט קומפקטי, Y מ"ט האוסדורף, $f : X \to Y$ על ורציפה, אזי f היא העתקת מנה.

הוכחה. f רציפה מ־X קומפקטי ל־Y האוסדורף ולכן f סגורה. ■

[62] באמצעות הטענה $f^{-1}(A^C) = (f^{-1}(A))^C$.

17.3 דוגמאות

נגדיר על $\mathbb{R}$ יחס שקילות לכל x: $x \sim -x$.

טענה 17.12 $\widehat{\mathbb{R}} \cong [0,\infty)$.

הוכחה. נגדיר $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ ע"י $f(t) = |t|$.

f רציף ומכבד את יחס השקילות ולכן משרה העתקה רציפה $\widehat{f} \to \widehat{\mathbb{R}} \to [0,\infty)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[0,\infty)} \arrow[ll, bend right, "i"'] \\
& \widehat{\mathbb{R}} \arrow[ur, "\widehat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

נוכיח כי $\widehat{f}$ הומאומורפיזם. נגדיר $g : [0,\infty) \to \widehat{\mathbb{R}}$ ע"י $g = \rho \circ i$ כאשר $i : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ העתקת ההכלה, $\rho : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ ההעתקה הקנונית של מרחב המנה. כלומר, $g(t) = \{t, -t\}$.

g רציפה כי היא הרכבה $\rho \circ i$ של שתי העתקות רציפות, ונא לוודא ש־$g \circ \widehat{f} = \mathrm{Id}_{\widehat{\mathbb{R}}}$, $\widehat{f} \circ g = \mathrm{Id}_{[0,\infty)}$. ■

18 תכונות הפרדה

18.1 תכונות T_1, T_2

בפרקים הקודמים הגדרנו את התכונות T_1, T_2, כאשר T_2 הוא האוסדורף ו־T_1 בה כל נקודון סגור.

את T_1 ניתן לבטא כתכונת הפרדה כך: לכל $a, b \in X$ יש U פתוחה כך ש־$a \in U$, $b \notin U$.

18.2 תכונות T_3, T_4

הגדרה 18.1 מ"ט X ייקרא T_3 אם

1. X הוא T_1.
2. לכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $S \subseteq X$ המקיימים $a \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש־$S \subseteq V$, $a \in U$.

הגדרה 18.2 מ"ט X נקרא T_4 אם

1. X הוא T_1.
2. לכל שתי קבוצות סגורות זרות S,T קיימות קבוצות פתוחות זרות U,V כך ש־$S \subseteq U, T \subseteq V$.

נשים לב כי מתקיים

$$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1$$

משפט 18.3 כל מרחב מטרי הוא T_4.

הוכחה.

1. מרחב מטרי הוא T_2 ולכן T_1.
2. יהיו S,T קבוצות סגורות זרות. לכל $a \in S$ מתקיים $a \in T^C$ שהיא קבוצה פתוחה, ולכן יש $\varepsilon_a > 0$ כך ש־$B(a,\varepsilon_a) \subseteq T^C$, כלומר, $B(a,\varepsilon_a)$ זר ל־T. לכל $a \in S$ נבחר ε_a כזה.
באותו האופן, לכל $b \in T$ נבחר $\delta_b > 0$ כך ש־$B(b,\delta_b)$ זר ל־S. נגדיר
$$U = \bigcup_{a \in S} B(a,\frac{\varepsilon_a}{2}), V = \bigcup_{b \in T} B(b,\frac{\delta_b}{2})$$
ומתקיים כי $S \subseteq U$, $T \subseteq V$. נוכיח כי $U \cap V = \emptyset$. נניח בשלילה כי קיים $z \in U \cap V$. כלומר, יש $a \in S$, $b \in T$ כך ש־$d(z,a) < \frac{\varepsilon_a}{2}$, $d(z,b) < \frac{\delta_b}{2}$, ובה"כ נניח $\varepsilon_a \le \delta_b$. נקבל כי
$$d(a,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\delta_b}{2} \le \delta_b$$
כלומר $a \in B(b,\delta_b)$ בסתירה לכך ש־$B(b,\delta_b)$ זר ל־S. הסתירה מוכיחה את הדרוש.

ולכן הוכחנו את שני התנאים, ולכן הוכחנו כי כל מרחב מטרי הוא אכן T_4.

■

משפט 18.4 יהי X מ"ט האוסדורף קומפקטי. אזי, X הוא T_4.

הוכחה. נוכיח זאת בשני שלבים: בשלב א', נוכיח ש־X הוא T_3. בשלב ב' נוכיח ש־X הוא T_4.

שלב א'. נניח S סגורה, $a \notin S$. לכל $x \in S$, כיוון ש־X האוסדורף, יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש־$x \in U_x, a \in V_x$.

עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה. מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא כיסוי פתוח של S ב־X. S סגורה במרחב X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי, ומכאן שקיים תת־כיסוי סופי ב־X. כלומר, יש $x_1,\dots,x_n$ כך ש־

$$S \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} U_{x_i} = U$$

אם ניקח $V = \bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}$ אז $a \in V$ וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$. מתקיים כי $U_{x_i} \subseteq V_{x_i}^C$, ולכן

$$\bigcup_i U_{x_i} \subseteq \bigcup V_{x_i}^C = \left(\bigcap_i V_{x_i}\right)^C$$

ומכאן $U \cap V = \emptyset$.

■

שלב ב'. נניח S סגורה, T סגורה ו־$S \cap T = \emptyset$. לכל $x \in S$, כיוון ש־X הוא T_3, יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש־$x \in U_x, T \subseteq V_x$. עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה.

מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x\in S}$ הוא כיסוי של S ב־X. S סגורה ב־X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי, ומכאן יש תת־כיסוי סופי ב־X. כלומר, יש $x_1, \ldots, x_n$ כך ש־

$$S \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i} = U$$

וניקח $V = \bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}$ אז $T \subseteq V$, וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$.

$$\bigcup_i U_{x_i} \subseteq \bigcup V_{x_i}^C = \left(\bigcap_i V_{x_i}\right)^C$$

ומכאן $U \cap V = \emptyset$. ■

חלק III

נספחים

חלק זה מכיל תוספות שאינן למבחן ואינן כלולות בחומר, לעניינכם האישי, ומהווה תוספת מעניינת לחומר הנלמד, שלא הוצג בהרצאה. את ההוכחות למשפטים כאן רשמתי בעצמי, ולכן אין להסתמך בצורה עיוורת על נכונותן של ההוכחות.

במידה ומצאתם טעות כלשהי, אשמח אם תפנו אליי למייל.

19 משפט טיכונוף למכפלה כלשהי

בפרק הקודם, הוכחנו את המשפט לפיו מכפלה **סופית** של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית. נוכיח כאן את הטענה הזהה[63] עבור מכפלה מעוצמה כלשהי.

כלומר,

משפט. יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים קומפקטים. אזי, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קומפקטי.

הוכחת המשפט תתבצע בצורה סדרתית. ראשית, נגדיר את המושג של מסנן.

הגדרה 19.1 תהי X קבוצה, ותהי $\mathcal{F}\subseteq P(X)$. אזי $\mathcal{F}$ ייקרא מסנן[64] אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\emptyset\notin\mathcal{F}$.
2. $A\in\mathcal{F}, A\subseteq B \implies B\in\mathcal{F}$.
3. $A,B\in\mathcal{F} \implies A\cap B\in\mathcal{F}$.

מסנן $\mathcal{F}$ ייקרא על־מסנן[65] אם לכל $U\in P(X)$, $U\in\mathcal{F}$ או $U^C\in\mathcal{F}$.

ההגדרה והמשמעות של מסנן תהיה דומה לזו של סדרה במרחב מטרי. כעת, נגדיר את המושג של התכנסות של מסנן.

הגדרה 19.2 יהי X מרחב טופולוגי, יהי $\mathcal{F}$ על־מסנן. אזי, נאמר ש־$\mathcal{F}$ מתכנס ל־$x\in X$ אם לכל סביבה U של x, $U\in\mathcal{F}$.

נוכיח ראשית את הטענה הבאה, שתשמש אותנו בהמשך.

טענה 19.3 תהי X קבוצה, יהי $\mathcal{F}\subseteq P(X)$ מסנן. אזי, קיים על־מסנן $\hat{\mathcal{F}}$ כך ש־$\mathcal{F}\subseteq\hat{\mathcal{F}}\subseteq P(X)$.

[63] הקרוייה משפט טיכונוף.
[64] באנגלית, Filter.
[65] באנגלית, Ultra-Filter.

הוכחה. נוכיח זאת בעזרת הלמה של צורן[66]. נחלק את ההוכחה לשני שלבים.

שלב א'. נוכיח כי קיים מסנן מקסימלי ביחס להכלה המכיל את $\mathcal{F}$. לשם כך, נגדיר $T = \left\{\hat{\mathcal{F}} \subseteq P(X) \mid \mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}}\right\}$[67].

קל לראות כי T אינה ריקה, כי $\mathcal{F} \in T$. נוכיח קיום מסנן מקסימלי זה ע"י הלמה של צורן, ולשם כך נגדיר על T את יחס ההכלה.

תהי שרשרת $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ב־T. נוכיח כי לה קיים חסם מלעיל ב־T. נסמן $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$. קל לראות כי זה אכן חסם מלעיל ביחס להכלה, וכעת מספיק להוכיח ש־$\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \in T$.

ברור כי האיחוד מכיל את $\mathcal{F}$, ולכן מספיק להוכיח ש־$\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ הוא מסנן. נוכיח את שלושת התנאים.

1. ברור כי $\emptyset \notin \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$.
2. נניח ש־$A \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$, ותהי $A \supseteq B$. A באיחוד, ולכן קיים $\alpha \in I$ כך ש־$A \in \mathcal{F}_\alpha$. $\mathcal{F}_\alpha$ מסנן ולכן $B \in \mathcal{F}_\alpha$, ומכאן $B \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$.
3. נניח ש־$A, B \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$. אזי, קיימים $\alpha, \beta \in I$ כך ש־$A \in \mathcal{F}_\alpha, B \in \mathcal{F}_\beta$. מכיוון שמדובר בשרשרת, נניח בה"כ כי $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$. ולכן, $A, B \in \mathcal{F}_\beta$ ולכן $A \cap B \in \mathcal{F}_\beta$.
מכאן נוכל להסיק כי $A \cap B \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$, ולקבל את הדרוש.

ולכן הוכחנו כי $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ אכן מסנן והוא חסם מלעיל. מכאן, הוכחנו כי לכל שרשרת יש חסם מלעיל, ולכן לפי הלמה של צורן קיים מסנן $\hat{\mathcal{F}}$ מקסימלי ביחס להכלה.

שלב ב'. יהי $\hat{\mathcal{F}}$ המסנן המקסימלי מן הסעיף הקודם. נוכיח כי הוא על־מסנן.

נניח בשלילה שהוא אינו על־מסנן. אזי, קיימת קבוצה A כך ש־$A \notin \hat{\mathcal{F}}, A^C \notin \hat{\mathcal{F}}$. תהי $U \in \hat{\mathcal{F}}$ כלשהי. נוכיח כי $U \cap A \neq \emptyset$. נניח בשלילה כי $U \cap A = \emptyset$, ומכאן נובע ש־$U \subseteq A^C$, ולכן בגלל ש־$\hat{\mathcal{F}}$ מסנן, נקבל ש־$A^C \in \hat{\mathcal{F}}$, בסתירה.

נגדיר כעת מסנן $\tilde{\mathcal{F}}$ חדש, המוגדר כך

$$\tilde{\mathcal{F}} = \underbrace{\hat{\mathcal{F}} \cup \left\{A \cap U : U \in \hat{\mathcal{F}}\right\}}_{\mathcal{V}} \bigcup \{B \mid \exists C \in \mathcal{V} : B \supseteq C\}$$

כלומר, אנחנו מגדירים מסנן המכיל את A, חיתוך כל קבוצה של $\hat{\mathcal{F}}$ עם A, וכל הקבוצות המכילות קבוצות כאלה. ההוכחה כי זהו מסנן מושארת **כתרגיל**[68].

כעת, בנינו מסנן $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ כך ש־$\hat{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$, בסתירה לכך ש־$\hat{\mathcal{F}}$ מקסימלי ביחס להכלה. ולכן, $\hat{\mathcal{F}}$ על־מסנן המכיל את $\mathcal{F}$, כנדרש. ■

כעת, נוכיח את הטענה המרכזית הבאה.

משפט 19.4 יהי X מרחב טופולוגי. אזי X קומפקטי $\iff$ כל על־מסנן $\mathcal{F}$ מתכנס.

[66] אודותיה אני ממליץ לחפש בוויקיפדיה.

[67] קבוצת כל המסננים המכילים את $\mathcal{F}$.

[68] ההוכחה אינה מסובכת ודורשת חלוקה למקרים, ורוב המקרים טריוויאלי בדיוק מן העובדה ש־$\hat{\mathcal{F}}$ מסנן, ומן העובדה שבנינו את הקבוצה כך שתהיה מסנן.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח בשלילה כי קיים על־מסנן $\mathcal{F}$ שאינו מתכנס לאף נקודה $a \in X$. אזי, לכל $a \in X$ קיימת סביבה $a \in V_a \subseteq X$ כך ש־$V_a \notin \mathcal{F}$. מכיוון ש־$\mathcal{F}$ על־מסנן, נקבל ש־$V_a^C \in \mathcal{F}$.

לכל $a \in X$ מוגדרת הסביבה V_a. מכאן, $\{V_a\}_{a\in X}$ מהווה כיסוי פתוח של X. X קומפקטי ולכן יש תת־כיסוי סופי

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} V_{a_i} = X \implies \bigcap_{1\leq i\leq n} V_{a_i}^C = \emptyset$$

כעת, נזכיר כי $V_{a_i}^C \in \mathcal{F}$ לכל $1 \leq i \leq n$, ובגלל ש־$\mathcal{F}$ מסנן הוא סגור לחיתוך סופי, ומכאן,

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} V_{a_i}^C \in \mathcal{F} \implies \emptyset \in \mathcal{F}$$

בסתירה לכך ש־$\emptyset \notin \mathcal{F}$ מהגדרת המסנן. הסתירה מוכיחה כי $\mathcal{F}$ מתכנס לנקודה $a \in X$ כלשהי.

■

($\Rightarrow$) נניח בשלילה כי X אינו קומפקטי. אזי, קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שלו אין תת־כיסוי סופי. אזי, נקבל שלכל קבוצה סופית $J \subseteq I$ מתקיים

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset X \implies \bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha^C \neq \emptyset$$

כעת, נגדיר את האוסף

$$\mathcal{F} = \underbrace{\left\{\bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha^C : J \subseteq I, |J| < \infty\right\}}_{\mathcal{U}} \bigcup \{B \mid \exists A \in \mathcal{U} : B \supseteq A\}$$

ההוכחה כי זהו מסנן מושארת **כתרגיל**[69].

כעת, $\mathcal{F}$ מסנן, ולכן קיים על־מסנן $\hat{\mathcal{F}}$ כך ש־$\mathcal{F} \supseteq \hat{\mathcal{F}}$. כעת, נוכיח לכל $a \in X$, $\hat{\mathcal{F}}$ **אינו** מתכנס ל־a. לשם כך, מספיק להראות שקיימת סביבה V_a של a כך ש־$V_a \notin \hat{\mathcal{F}}$. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X,

ולכן קיים $\beta \in I$ כך ש־$a \in U_\beta$. כעת, $U_\beta^C \in \hat{\mathcal{F}}$[70], ומכאן $U_\beta \notin \hat{\mathcal{F}}$. ולכן, מצאנו סביבה של U_β של a כך ש־$U_\beta \notin \hat{\mathcal{F}}$, ולכן $\hat{\mathcal{F}}$ **אינו** מתכנס ל־a.

ולכן, בנינו $\hat{\mathcal{F}}$ על־מסנן שאינו מתכנס, בסתירה להנחה לפיה כל על־מסנן מתכנס. הסתירה מוכיחה כי X קומפקטי.
■

כעת, כל שנותר הוא להוכיח את המשפט המרכזי,

משפט 19.5 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים קומפקטים. אזי, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קומפקטי.

[69] ההוכחה גם כאן אינה מסובכת, ומסתמכת במיוחד על העובדה שכל חיתוך סופי של קבוצות **אינו ריק**.
[70] כי $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ והגדרנו את $\mathcal{F}$ כך ש־$U_\beta^C \in \mathcal{F}$.

הוכחה. יהי $\mathcal{F}$ על־מסנן של $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, נוכיח כי הוא מתכנס לנקודה $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$. לכל $\beta \in I$ נגדיר $\mathcal{F}_\beta = \left\{U \subseteq X_\alpha : p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}\right\}$. ההוכחה כי $\mathcal{F}_\beta$ הוא **על־מסנן** לכל $\beta \in I$ מושארת כתרגיל[71].

X_β קומפקטי לכל $\beta \in I$, ולכן קיימת נקודה $a_\beta \in X_\beta$ כך ש־$\mathcal{F}_\beta$ מתכנס אליה. תהי הנקודה $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ הבנויה מכל a_β הנ"ל. נוכיח כי $\mathcal{F}$ מתכנס אליה. לשם כך, צריך להוכיח שכל סביבה של $(a_\beta)_{\beta\in I}$ נמצאת ב־$\mathcal{F}$.

מכיוון ש־$\mathcal{F}$ מסנן ולכן סגור לקבוצות המכילות קבוצות ב־$\mathcal{F}$, מספיק שנוכיח כי כל סביבה בסיסית של $(a_\beta)_{\beta\in I}$ נמצאת ב־$\mathcal{F}$. תהי סביבה בסיסית $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ של $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$. לכן, $\alpha_\beta \in U_\beta$ ולכן $U_\beta \in \mathcal{F}_\beta$ לכל $\beta \in I$. ולכן, $p_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{F}$ לכל $\beta \in I$.

מכיוון ש־$\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ היא בסיסית, קיימת קבוצה סופית $J \subseteq I$ כך שלכל $\alpha \notin J$ מתקיים $U_\alpha = X_\alpha$. ולכן, ניתן לראות כי

$$\prod_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{F}$$

כי היא חיתוך סופי של קבוצות ב־$\mathcal{F}$. ולכן הוכחנו כי כל סביבה בסיסית של $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ נמצאת ב־$\mathcal{F}$, ולכן כל סביבה של $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ נמצאת ב־$\mathcal{F}$ ולכן $\mathcal{F}$ מתכנס ל־$(a_\alpha)_{\alpha\in I}$.

מכאן, כל על־מסנן $\mathcal{F}$ מתכנס לנקודה כלשהי, ולכן לפי המשפט הקודם, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קומפקטי. ∎

[71] כאן, כרגיל, הכל נובע מן העובדה ש־$\mathcal{F}$ על־מסנן.