29.10.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 1

בקורס זה ניקח מרחבים טופולוגיים ונייצר מהם חבורות.

נדבר על קטגוריות, ונתחיל ממספר דוגמאות:

- קטגוריה של $\underbrace{\text{מרחבים טופולוגיים}}_{\text{אובייקטים}}$ ושל $\underbrace{\text{העתקות רציפות}}_{\text{מורפיזמים}}$.
- קטגוריה של $\underbrace{\text{חבורות}}_{\text{אובייקטים}}$ ושל $\underbrace{\text{הומומורפיזמים}}_{\text{מורפיזמים}}$.
- קטגוריה של $\underbrace{\text{מרחבים וקטוריים}}_{\text{אובייקטים}}$ ושל $\underbrace{\text{העתקות לינאריות}}_{\text{מורפיזמים}}$.

<u>הגדרה:</u>

קטגוריה $\mathcal{C}$ היא מחלקה שאיבריה נקראים אובייקטים, לכל זוג אובייקטים $A,B\in\mathcal{C}$ קיימת <u>קבוצה</u> $Mor(A,B)$ של מורפיזמים, לכל $A,B,C\in\mathcal{C}$ קיימת פעולת הרכבה $Mor(A,B)\times Mor(B,C)\longrightarrow Mor(A,C)$ שמסומן ב-$\circ$, $(f,g)\mapsto g\circ f$, ולכל $A\in\mathcal{C}$ קיים איבר נבחר $I_A\in Mor(A,A)$. את האיבר $f\in Mor(A,B)$ נרשום $f:A\longrightarrow B$ (זו לא פונקציה, אלא דרך רישום מקוצר). התכונות שאנו מניחים:

א. אם $f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C$ ו-$h:C\longrightarrow D$, אזי

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

ב. אם $f:A\longrightarrow B$, אזי $I_B\circ f=f=f\circ I_A$.

<u>הגדרה:</u>

יהיו $\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$ שתי קטגוריות. פנקטור F מ-$\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{D}$ הוא התאמה

$$F:\ \overset{\text{אובייקטים}}{\text{של } \mathcal{C}}\longrightarrow\overset{\text{אובייקטים}}{\text{של } \mathcal{D}}$$

ולכל $A,B\in\mathcal{C}$,

$$F:Mor(A,B)\longrightarrow Mor(F(A),F(B))$$

<u>דוגמה:</u>

לכל מרחב טופולוגי נבנה חבורה, ולכל העתקה רציפה מ-X ל-Y יותאם הומומורפיזם מ-G ל-H:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "F"'] & Y \arrow[d, squiggly] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

לכל $f:A\longrightarrow B$ עבור $A,B\in\mathcal{C}$, אז $F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$. אנו דורשים:

א. שומר הרכבה: $F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

ב. שומר על הזהות $F(I_A)=I_{F(A)}$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g)\circ F(f)=F(g\circ f)"'] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \end{tikzcd}$$

הגדרה:

תהי $\mathcal{C}$ קטגוריה, $A,B\in\mathcal{C}$ ו-$f:A\longrightarrow B$ מורפיזם. נאמר ש-f איזומורפיזם

אם קיים $g:B\longrightarrow A$ כך ש-$g\circ f=I_A$ ו-$f\circ g=I_B$.

טענה:

אם $f:A\longrightarrow B$ איזומורפיזם ו-$g:B\longrightarrow C$ איזומורפיזם, אז גם $g\circ f:A\longrightarrow C$ איזומורפיזם.

הוכחה:

f איזומורפיזם, ולכן קיים $h:B\longrightarrow A$ כך ש-$h\circ f=I_A$ ו-$f\circ h=I_B$.

g איזומורפיזם, ולכן קיים $t:C\longrightarrow B$ כך ש-$t\circ g=I_B$ ו-$g\circ t=I_C$.

נביט ב-$h\circ t\in Mor(C,A)$. מתקיים:

$$(h\circ t)\circ(g\circ f)=h\circ(t\circ g)\circ f=h\circ I_B\circ f=h\circ f=I_A$$

ובאותו אופן $(g\circ f)\circ(h\circ t)=I_C$, כדרוש.

טענה:

יהיו $\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$ שתי קטגוריות, F פונקטור מ-$\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{D}$, יהיו $A,B\in\mathcal{C}$

ויהי $f:A\longrightarrow B$ איזומורפיזם. אזי $F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$ הוא איזומורפיזם.

הוכחה:

f איזומורפיזם, כלומר יש $g:B\longrightarrow A$ כך ש-$g\circ f=I_A$ ו-$f\circ g=I_B$. מכאן

$$F(g)\circ F(f)=F(g\circ f)=F(I_A)=I_{F(A)}$$

ובאותו אופן $F(f)\circ F(g)=I_{F(B)}$

כלומר $F(f)$ אכן איזומורפיזם.

הגדרה:

יהיו X ו-Y מרחבים טופולוגיים, $f,g:X\longrightarrow Y$ (רציפות, כמובן).

הומוטופיה מ-f ל-g היא העתקה (רציפה, כמובן) $H:X\times I\longrightarrow Y$ $(I=[0,1])$

כך שמתקיים $H(x,0)=f(x)$ ו-$H(x,1)=g(x)$ לכל $x\in X$.

נסמן $h_t(x):=H(x,t)$, $h_t:X\longrightarrow Y$.

הגדרה:

על קבוצת הפונקציות הרציפות מ-X ל-Y נגדיר יחס שקילות $f\sim g$

(f הומוטופית ל-g), אם קיימת הומוטופיה מ-f ל-g. מחלקות שקילות נקראות מחלקות הומוטופיה.

נראה שזה אכן יחס שקילות:

א. $f\sim f$: ניקח $H(x,t):=f(x)$. היא הרכבה

$$\begin{tikzcd} X\times I \arrow[r, "\text{הטלה}"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

של רציפות ולכן היא רציפה. קל לבדוק ש-$H(x,0)=H(x,1)=f(x)$.

ב. נניח $f\sim g$, ונוכיח $g\sim f$: נניח $H(x,t)$ הומוטופיה מ-f ל-g.

נגדיר $K:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י $K(x,t):=H(x,1-t)$. היא רציפה כהרכבה של רציפות:

$$X\times I \xrightarrow[\substack{(x,t)\mapsto(x,1-t)\\ Id_X\times(t\mapsto 1-t)}]{} X\times I \xrightarrow{H} Y$$

ג. נניח $f\sim g$, $g\sim h$. צ"ל $f\sim h$. נניח H הומוטופיה מ-f ל-g

ו-K הומוטופיה מ-g ל-h. נגדיר $S:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י

$$S(x,t):=\begin{cases} H(x,2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ K(x,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$X\times[0,\frac{1}{2}]$ ו-$X\times[\frac{1}{2},1]$ סגורות ב-$X\times I$, ולכן מספיק לבדוק רציפות בכל חלק.

טענה:

אם $f\sim f':X\to Y$ ו-$g\sim g':Y\to Z$, אזי $g\circ f\sim g'\circ f'$.

הוכחה:

כיוון שאנו יודעים שזה יחס שקילות, נוכל להוכיח ש- $g\circ f\underset{K}{\sim} g\circ f'\underset{T}{\sim} g'\circ f'$.

הוכחת $\underline{K}$: נניח H הומוטופיה מ-f ל-f'. נגדיר $K:X\times I\longrightarrow Z$ ע"י

$K(x,t):=g(H(x,t))$, כלומר $K=g\circ H$.

הוכחת $\underline{T}$: נניח S הומוטופיה מ-g ל-g'. נגדיר $T:X\times I\longrightarrow Z$ ע"י

$T(x,t):=S(f'(x),t)$, והיא רציפה כהרכבה $X\times I\xrightarrow[f'\times Id_I]{} Y\times I\xrightarrow[S]{} Z$

מסקנה:

הרכבה של מחלקות הומוטופיה מוגדרת היטב ע"י הרכבה של נציגים.

קיבלנו קטגוריה חדשה, הקטגוריה ההומוטופית. בקטגוריה זו האובייקטים הם מרחבים טופולוגיים, אבל המורפיזמים הם מחלקות ההומוטופיה של העתקות רציפות. הזהות היא מחלקת ההומוטופיה של הזהות.

ננסה להבין את מושג האיזומורפיזם בקטגוריה ההומוטופית.

$[f]:X\longrightarrow Y$ היא איזומורפיזם אם קיימת $[g]:Y\longrightarrow X$, כך שמתקיים

$$[g]\circ[f]=[Id_X] \quad ; \quad [f]\circ[g]=[Id_Y]$$

כלומר $g\circ f\sim Id_X$ ו- $f\circ g\sim Id_Y$.

הגדרה:

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. $f:X\longrightarrow Y$ תיקרא שקילות הומוטופית אם קיימת $g:Y\longrightarrow X$ שעבורה $g\circ f\sim Id_X$ ו- $f\circ g\sim Id_Y$.

טענה:

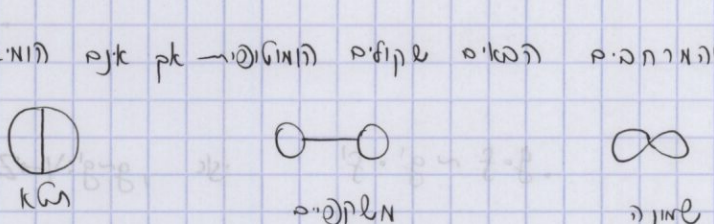
אם $f:X\longrightarrow Y$ שקילות הומוטופית ו- $g:Y\longrightarrow Z$ שקילות הומוטופית, אזי גם $g\circ f$ שקילות הומוטופית.

הגדרה:

אני נאמר ש- X שקול הומוטופית ל- Y, ונסמן $X\simeq Y$, אם יש שקילות הומוטופית $f:X\longrightarrow Y$.

תרגיל:

הוכיחו שהמרחבים הבאים שקולים הומוטופית אך אינם הומיאומורפיים:



כדי להוכיח ששני מרחבים שקולים הומוטופית:

א. שתי פונקציות רציפות.

ב. מהי ההרכבה (בכל כיוון).

ג. שכל הרכבה הומוטופית לזהות.

5.11.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 2

הגדרה:

מרחב טופולוגי X ייקרא כוויץ, אם Id_X הומוטופית להעתקה קבועה.

דוגמאות:

$\mathbb{R}^n$ כוויץ. ביתר כלליות, אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, אז X מרחב טופולוגי כוויץ.

הוכחה:

נבנה $H:X\times I\longrightarrow X$ כך שמתקיים $H(x,0)=x$ לכל x וקיים $a\in X$

כך שמתקיים $H(x,1)$ לכל x.

נבחר $a\in X$ כלשהו, ונגדיר $H(x,t):=(1-t)x+ta$.

למעשה מספיק לדרוש ש-X "כוכבית".

טענה:

X כוויץ אם ורק אם X שקול הומוטופית למרחב בן נקודה אחת.

הוכחה:

X כוויץ, פירוש שקיים $a\in X$ כך שהפונקציה $K_a^{XX}\sim Id_X$

נניח ש-X כוויץ, ויהי $\{p\}$.

(K_a^{XX} הוא סימון לפונקציה קבועה ~~עם~~ ערך קבוע a).

נבחר $f:X\longrightarrow\{p\}$ ו-$g:\{p\}\longrightarrow X$ ע"י $g(p)=a$.

$f\circ g=Id_{\{p\}}$, וכן $g\circ f=K_a^{XX}$, והנחנו $K_a^{XX}\sim Id_X$.

בכיוון השני, נניח ש-$X\simeq\{p\}$. כלומר יש $f:X\longrightarrow\{p\}$ ו-$g:\{p\}\longrightarrow X$

כך ש-$g\circ f\sim Id_X$, אולם זוהי העתקה קבועה.

הגדרה:

העתקה ההומוטופית להעתקה קבועה נקראת נול-הומוטופית.

הגדרה:

יהי X מרחב טופולוגי, $A\subseteq X$. A נקרא **נסג** של X אם קיימת העתקה $r:X\longrightarrow A$ כך שלכל $a\in A$, $r(a)=a$.

אם נסמן ב- $i:A\longrightarrow X$ את העתקת ההכלה, אז את התנאי הנ"ל ניתן לרשום כך: $r\circ i=Id_A$.

דוגמאות:

א. $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$ הוא נסג.

ב. המעגל השמאלי ב- ∞ הוא נסג שלו. אפשרויות:

(1) סיבוב המעגל הימני ב- $180°$.

(2) שיקוף. (3) כיווץ המעגל הימני לנקודת החיתוך.

ג. אם X הוא קטע $[a,b]$, אז $\partial X=\{a,b\}$ אינו נסג של X.

הגדרה:

יהי X מרחב טופולוגי, $A\subseteq X$. A נקרא **נסג עיוות** של X אם קיימת הומוטופיה $H:X\times I\longrightarrow X$ שעבורה:

א. $H(x,0)=x$ לכל $x\in X$.

ב. $H(a,t)=a$ לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$.

ג. $H(x,1)\in A$ לכל $x\in X$.

דוגמה:

$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$ הוא נסג עיוות. אכן, נגדיר $H((x,y),t):=(x,(1-t)y)$.

טענה:

אם $A\subseteq X$ נסג עיוות, אז העתקת ההכלה $i:A\longrightarrow X$ היא שקילות הומוטופית.

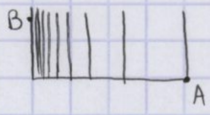
הוכחה:

נגדיר $r:X\longrightarrow A$ ע"י $r(x):=H(x,1)$. מתקיים $r\circ i=Id_A$.

נותר להראות $i\circ r\sim Id_X$. ההומוטופיה H מראה זאת.

נזכר שאם $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה, הראינו שהפונקציה $H(x,t)=(1-t)x+ta$ היא הומוטופיה עבור $a\in A$ כלשהו. כעת, ניתן לשים לב ש- $\{a\}$ נסג עיוות של A.

דוגמה:



הנקודה A היא אכן נסג עוותי של ה"חנוכיה".

עם זאת, הנקודה B אינה כזו!

על כל "נר" אחר זה עובד.

דוגמה:

$S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ הוא נסג עוותי. $\left(S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}\right)$

$$H(x,t):=(1-t)x+t\cdot\frac{x}{\|x\|}$$

בפרט, נסיק ש- $\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \simeq S^{n-1}$.

12.11.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 3

הגדרה:

יהיו $f,g:X\to Y$ ו-$A\subseteq X$. נאמר ש-f הומוטופית ל-g ביחס ל-A, ונסמן $f\simeq_A g$, אם קיימת הומוטופיה $H:X\times I\to Y$ מ-f ל-g המקיימת $H(a,t)=H(a,0)$ לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$.

הערה:

אם $f\simeq_A g$, אזי בפרט $f|_A=g|_A$.

תרגיל:

$\simeq_A$ יחס שקילות.

סימון:

אם $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$. $f:(X,A)\to(Y,B)$ פירושו $f:X\to Y$ שעבורה $f(A)\subseteq B$.

תרגיל:

אם $f\simeq_A f':(X,A)\to(Y,B)$ וגם $g\simeq_B g':(Y,B)\to(Z,C)$ אזי $g\circ f\simeq_A g'\circ f'$.

תזכורת:

$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, $D^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$. בפרט $S^1\subseteq D^2$.

S^1 כתת-מרחב של D^2 מסומן גם ∂D^2 (שפה של D^2).

משפט:

יהי X מרחב טופולוגי, $f:S^1\to X$. אזי התכונות הבאות ביחס ל-f שקולות:

א. f נול הומוטופית.

ב. f נול הומוטופית ביחס לנקודה כלשהי ב-S^1.

ג. f ניתנת להרחבה ל-D^2.

הוכחה:

$\boxed{\text{ב}\to\text{א}}$ טריוויאלי.

$\boxed{\text{א}\to\text{ג}}$ קיימת הומוטופיה $S^1\times I\xrightarrow{H}X$ שעבורה $H(x,0)=f(x)$ ו-$H(x,1)=a$ עבור $a\in X$ כלשהו.

נגדיר $S^1\times I\xrightarrow{G}D^2$ ע"י $G(x,t):=(1-t)x$. G העתקת מנה,

כי $S^1\times I$ קומפקטי ו-D^2 האוסדורף. H מכבדת את יחס השקילות

של $S^1\times I$, ולכן משרה העתקה $\hat{H}:D^2\to X$ המרחיבה את H.

$\boxed{\text{ג}\to\text{ב}}$ יש $F:D^2\to X$ הרחבה של f, כלומר $F|_{S^1}=f$. בהינתן $p\in S^1$ נבנה נול הומוטופיה של f ביחס ל-$\{p\}$ ע"י $H(x,t):=F((1-t)x+tp)$. זו אכן רציפה, $H(x,0)=F(x)=f(x)$, ו-$H(x,1)=F(p)=f(p)$.

בנייה:

יהי X מרחב טופולוגי. לכל $a,b\in X$ נגדיר את קבוצת המסלולים מ-a ל-b:

$$\Gamma_{ab} := \{\gamma: I\longrightarrow X \mid \gamma(0)=a,\ \gamma(1)=b\}$$

על Γ_{ab} נביט ביחס השקילות $\delta \simeq_{\partial I} \gamma$. נסמן את מחלקות השקילות ב- $[\gamma]$. נסמן את קבוצת מחלקות השקילות ב- $\hat{\Gamma}_{ab}$.

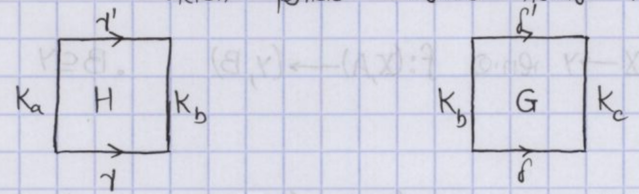
אם $\gamma\in\Gamma_{ab}$, $\delta\in\Gamma_{bc}$, נביט בשרשור $\gamma*\delta\in\Gamma_{ac}$.

טענה:

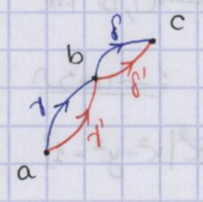
אם $\gamma\simeq_{\partial I}\gamma'\in\Gamma_{ab}$, $\delta\simeq_{\partial I}\delta'\in\Gamma_{bc}$, אזי $\gamma'*\delta' \simeq_{\partial I} \gamma*\delta$.

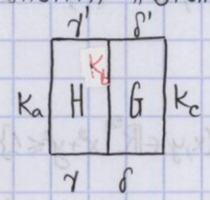
הוכחה:

את הנתונים אפשר לתאר סכמטית באופן הבא:



ואנו מגדירים (סכמטית) את ההומוטופיה הדרושה:





המשך הבנייה:

כלומר הראינו שפעולת השרשור מכבדת את יחס השקילות, ולכן אשרה פעולה מוגדרת היטב: אם $[\gamma]\in\hat{\Gamma}_{ab}$, $[\delta]\in\hat{\Gamma}_{bc}$, אזי $[\gamma][\delta] := [\gamma*\delta]$.

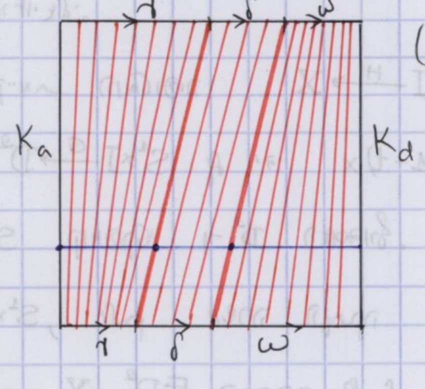
משפט:

אם $[\gamma]\in\hat{\Gamma}_{ab}$, $[\delta]\in\hat{\Gamma}_{bc}$ ו-$[\omega]\in\hat{\Gamma}_{cd}$, אזי $([\gamma][\delta])[\omega]=[\gamma]([\delta][\omega])$.

הוכחה:

פירוש הטענה במונחים של הנציגים הוא $(\gamma*\delta)*\omega \simeq_{\partial I} \gamma*(\delta*\omega)$.

(הסכם: קווים אדומים = פונקציות קבועות)



משפט:

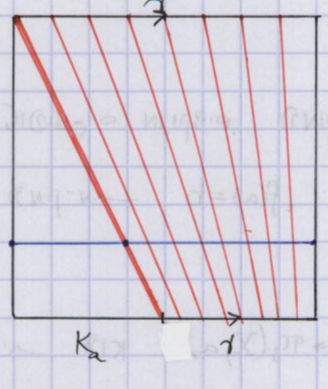
האיבר $[K_a]\in\hat{\Gamma}_{aa}$ מקיים את התכונה הבאה:

לכל $[\gamma]\in\hat{\Gamma}_{ab}$ מתקיים $[K_a][\gamma]=[\gamma]$, ולכל $[\delta]\in\hat{\Gamma}_{ba}$ מתקיים $[\delta][K_a]=[\delta]$.

הוכחה:

פירוש הטענה במונחים של הנציגים הוא $K_a*\gamma\simeq_{\partial I}\gamma$ וכן $\delta*K_a\simeq_{\partial I}\delta$.

נוכיח עבור γ:



טענה:

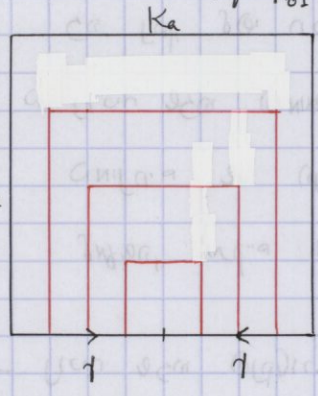
לכל $[\gamma]\in\hat{\Gamma}_{ab}$ קיים $[\delta]\in\hat{\Gamma}_{ba}$ שעבורו $[\gamma][\delta]=[K_a]$ ו-$[\delta][\gamma]=[K_b]$.

הוכחה:

כמובן, עבור מסלה γ אנו מסמנים $\bar{\gamma}$ את המסלה $\bar{\gamma}: I\longrightarrow X$

המוגדרת כך: $\bar{\gamma}(t):=\gamma(1-t)$. נראה ש-$[\bar{\gamma}]$ מקיימת את הנדרש, כלומר

במונחי נציגים צריך להוכיח $\gamma*\bar{\gamma}\simeq_{\partial I}K_a$ וכן $\bar{\gamma}*\gamma\simeq_{\partial I}K_b$.



מסקנה:

כל אחד מה-$\hat{\Gamma}_{aa}$-ים הוא חבורה.

הגדרה:

מרחב טופולוגי מנוקד הוא זוג (X,a), כאשר X מרחב טופולוגי ו-$a\in X$.

a נקרא נקודת הבסיס.

הגדרה:

בהינתן מרחב טופולוגי מנוקד (X,a), נגדיר את החבורה היסודית של X ביחס ל-a, שתסומן $\pi_1(X,a)$, כך: $\pi_1(X,a)=\hat{\Gamma}_{aa}$.

במילים אחרות, $\pi_1(X,a)$ הם מחלקות ההומוטופיה ביחס ל-∂I של מסילות המתחילות והמסתיימות ב-a, ואיבר היחידה הוא $[K_a]$.

הערה:

בקטגוריה של מרחבים טופולוגיים מנוקדים, המורפיזמים הם $f:(X,a)\longrightarrow(Y,b)$, כלומר $f:X\longrightarrow Y$ המקיימת $f(a)=b$.

הגדרה:

פונקטור החבורה היסודית הוא $(X,a)\rightsquigarrow\pi_1(X,a)$,

ובהינתן $f:(X,a)\longrightarrow(Y,b)$ נגדיר הומומורפיזם של חבורות $f_*:\pi_1(X,a)\longrightarrow\pi_1(Y,b)$ באופן הבא: לכל $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$ נגדיר $f_*([\varphi]) := [f\circ\varphi]$.

צריך לבדוק שזה מוגדר היטב, ושזהו הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה:

א. נוכיח שזה מוגדר היטב, כלומר אם $\varphi\simeq_{\partial I}\varphi'$ אזי $f\circ\varphi\simeq_{\partial I}f\circ\varphi'$.

זה נכון, לפי תכונה של $\simeq_{\partial I}$ (שימור הרכבה).

ב. נוכיח שזהו הומומורפיזם, כלומר $f_*([\varphi][\psi])=f_*([\varphi])f_*([\psi])$.

מבחינת הנציגים, $f\circ(\varphi*\psi)\simeq_{\partial I}(f\circ\varphi)*(f\circ\psi)$.

למעשה, מתקיים ממש שוויון (ולא רק $\simeq_{\partial I}$) - קל לבדוק.

עתה נוכיח שזהו פונקטור.

הוכחה:

ראשית, $Id_{(X,a)*}=Id_{\pi_1(X,a)}$; אכן, $[Id_X\circ\varphi]=[\varphi]$.

כמו כן, בהינתן $(X,a),(Y,b),(Z,c)$ מרחבים טופולוגיים ו- $f:(X,a)\longrightarrow(Y,b)$, $g:(Y,b)\longrightarrow(Z,c)$,

$$g_*\circ f_*([\varphi])=g_*([f\circ\varphi])=[g\circ(f\circ\varphi)]=[(g\circ f)\circ\varphi]=(g\circ f)_*([\varphi])$$

<u>משפט:</u>

יהי X מרחב טופולוגי, ו-$a,b\in X$ באותו רכיב קשירות מסילתית.

אז: $\pi_1(X,a)\cong\pi_1(X,b)$.

<u>הוכחה:</u>

בהינתן מסילה γ מ-a ל-b, נבנה איזומורפיזם $F_\gamma:\pi_1(X,a)\longrightarrow\pi_1(X,b)$

באופן הבא: $F_\gamma([\varphi]):=[\bar{\gamma}][\varphi][\gamma]$.

נוכיח שזהו הומומורפיזם של חבורות:

$$F_\gamma([\varphi])F_\gamma([\psi])=[\bar{\gamma}][\varphi]\underbrace{([\gamma][\bar{\gamma}])}_{[K_a]}[\psi][\gamma]=[\bar{\gamma}][\varphi][\psi][\gamma]=F_\gamma([\varphi][\psi])$$

באותו אופן, $F_{\bar{\gamma}}:\pi_1(X,b)\longrightarrow\pi_1(X,a)$ הומומורפיזם, ומתקיים

$$F_{\bar{\gamma}}\circ F_\gamma=Id_{\pi_1(X,a)}\qquad F_\gamma\circ F_{\bar{\gamma}}=Id_{\pi_1(X,b)}$$

אכן, (נראה את הראשון),

$$F_{\bar{\gamma}}(F_\gamma([\varphi]))=F_{\bar{\gamma}}([\bar{\gamma}][\varphi][\gamma])=\underbrace{[\gamma][\bar{\gamma}]}_{K_a}[\varphi]\underbrace{[\gamma][\bar{\gamma}]}_{K_a}=[\varphi]$$

19.11.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 4

נ.נ.ח $f\sim g:X\longrightarrow Y$, ויהי $a\in X$. מה הקשר בין f_* ל-g_*?

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y,f(a)) \\ \pi_1(X,a) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\ & \pi_1(Y,g(a)) \end{tikzcd}$$

נ.נ.ח $H:X\times I\longrightarrow Y$ הומוטופיה מ-f ל-g, ונסמן $\gamma(t):=H(a,t)$.

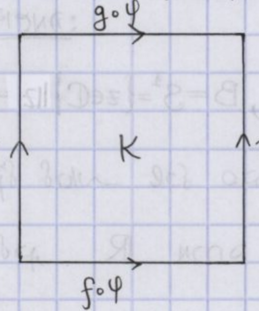
γ היא מסילה ב-Y מ-$f(a)$ ל-$g(a)$.

משפט:

$g_*=F_\gamma\circ f_*$.

הוכחה:

יהי $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$. נגדיר $K:I\times I\longrightarrow Y$ ע"י $K(s,t)=H(\varphi(s),t)$.



$$[\bar\gamma][f\circ\varphi][\gamma][\overline{g\circ\varphi}]=[K_{g(a)}]$$

כי הלולאה משמאל היא פונקציה על שפת הריבוע, D^2, ויש לה הרחבה לפנים של הריבוע.

(אומנם המשפט שהוכחנו היה תקף למעגל, אך ניתן לבדוק שאם העתקה על קטע מעתיקה את הקצוות לאותה נקודה זה גם נכון)

במונה האלגברי הגדול נכפול מימין ב-$[g\circ\varphi]$, ונקבל $[\bar\gamma][f\circ\varphi][\gamma]=[g\circ\varphi]$,

שפירושו $F_\gamma([f\circ\varphi])=[g\circ\varphi]$, ומכאן $(F_\gamma\circ f_*)([\varphi])=g_*([\varphi])$.

זה נכון לכל $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$, כלומר $F_\gamma\circ f_*=g_*$.

משפט:

תהי $f:X\longrightarrow Y$ שקילות הומוטופית, ויהי $a\in X$.

אז $f_*:\pi_1(X,a)\longrightarrow\pi_1(Y,f(a))$ הוא איזומורפיזם.

הוכחה:

מהנתון קיימת $g:Y\longrightarrow X$ כך ש-$g\circ f\sim Id_X$ ו-$f\circ g\sim Id_Y$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,a) \arrow[dr, "f_*^a"] \arrow[dd, "F_\gamma"', "\cong"] & \\ & \pi_1(Y,f(a)) \arrow[dl, "g_*^{f(a)}"'] \arrow[dd, "F_\delta", "\cong"'] \\ \pi_1(X,g(f(a))) \arrow[dr, "f_*^{g(f(a))}"'] & \\ & \pi_1(Y,f(g(f(a)))) \end{tikzcd}$$

$g_*^{f(a)}\circ f_*^a=F_\gamma$ היא על, ולכן $g_*^{f(a)}$ על.

$f_*^{g(f(a))}\circ g_*^{f(a)}=F_\delta$ היא חד-חד ערכית ולכן $g_*^{f(a)}$ חד-חד ערכית.

$g_*^{f(a)}\circ f_*^a=F_\gamma\Leftarrow f_*^a=(g_*^{f(a)})^{-1}\circ F_\gamma$, ולכן גם היא איזומורפיזם.

מרחבי כיסוי

הגדרה:

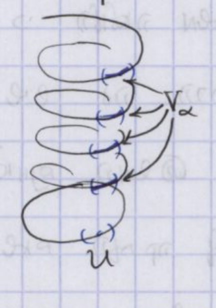
יהיו E,B מרחבים טופולוגיים, ותהי $p:E\to B$. אזי p נקראת העתקת כיסוי (ו-E נקרא מרחב כיסוי של B), אם מתקיים:

לכל $x\in B$ יש סביבה $\mathcal{U}$ כך ש-$p^{-1}(\mathcal{U})$ הוא איחוד זר (לא ריק) של קבוצות פתוחות $\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha$, כך שלכל $\alpha\in J$, $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to \mathcal{U}$ הוא הומיאומורפיזם.

$\mathcal{U}$ כזאת נקראת סביבה טובה.

דוגמה:

$B=S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, $E=\mathbb{R}$ ו-$p:\mathbb{R}\to S^1$ מוגדרת ע"י $p(t):=e^{2\pi i t}$.



קל לראות שכל סביבה שאינה המרחב כולו היא סביבה טובה.

לכן, $\mathbb{R}$ מרחב כיסוי של S^1.

משפט:

תהי $p:E\to B$ העתקת כיסוי, ותהי $\gamma:I\to B$. נסמן $a=\gamma(0)$, ונבחר $e\in p^{-1}(a)$.

אזי קיימת מסילה יחידה $\delta:I\to E$ המקיימת:

א. $p\circ\delta=\gamma$.

ב. $\delta(0)=e$.

את ה-δ הזו נסמן ב-$\hat{\gamma}^e$.

בהוכחה נעזר במשפט הבא מטופולוגיה:

משפט:

יהי M מרחב מטרי קומפקטי, ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in J}$ כיסוי פתוח של M.

אזי קיים מספר δ כך שלכל כדור $B(x,\delta)$ ב-M יש $\alpha\in J$ שעבורו $B(x,\delta)\subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

26.11.14 <u>טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 5</u>

<u>משפט:</u>

תהי $p:E\to B$ העתקת כיסוי, תהי $\gamma:I\to B$ מסילה, ותהי $e\in p^{-1}(\gamma(0))$.

אזי <u>קיימת</u> מסילה <u>יחידה</u> $\hat{\gamma}:I\to E$ כך שמתקיים:

א. $\hat{\gamma}(0)=e$.

ב. $p\circ\hat{\gamma}=\gamma$.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\{U_\alpha\}_\alpha$ כיסוי של B ע"י קבוצות פתוחות טובות.

אזי $\{\gamma^{-1}(U_\alpha)\}_\alpha$ הוא כיסוי פתוח של I. I מרחב מטרי קומפקטי, ולכן

יש מספר לבג, כך שכל קטע חלקי $J\subseteq I$ שרדיוסו קטן מ-ל קיים α שעבורו $J\subseteq\gamma^{-1}(U_\alpha)$,

כלומר $\gamma(J)\subseteq U_\alpha$. אם כן, נחלק את I לקטעים $J_1,J_2,\dots,J_n$, $J_i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$.

עבור n מספיק גדול, כלומר $\frac{1}{n}<$ ל, נקבל שלכל i יש U_α כך ש-$\gamma(J_i)\subseteq U_\alpha$.

נרים את $\gamma|_{[0,\frac{1}{n}]}$: $\gamma([0,\frac{1}{n}])\subseteq U_\alpha$ עבור איזשהו α. $p^{-1}(U_\alpha)$ איחוד זר

של קבוצות פתוחות V_β כך ש-$p|_{V_\beta}:V_\beta\to U_\alpha$ הומיאומורפיזם.

נסמן ב-V את ה-V_β המכיל את e. אזי אם יש הרמה, בהכרח

תמונתה ב-V, ואם תמונתה ב-V היא בהכרח $\hat{\gamma}|_{[0,\frac{1}{n}]}:=(p|_V)^{-1}\circ\gamma|_{[0,\frac{1}{n}]}:[0,\frac{1}{n}]\to E$

(בהכרח, כי p חד-חד ערכי). זו העתקה רציפה, כי $(p|_V)^{-1}$ העתקה רציפה.

בשלב הבא נרים את $\gamma|_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ מנקודת הסיום של $\hat{\gamma}|_{[0,\frac{1}{n}]}$ באותו אופן.

כך ממשיך עד הקטע האחרון $[\frac{n-1}{n},1]$.

בכל שלב נכפתה עלינו הגדרת $\hat{\gamma}$, ולכן היא גם יחידה.

<u>סימון:</u>

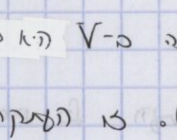
נסמן את ההרמה של γ המתחילה ב-e ע"י $\hat{\gamma}^e$.

<u>משפט:</u>

יהיו $\gamma,\delta:I\to B$, $\gamma\underset{\partial I}{\simeq}\delta$ (בפרט $\gamma(0)=\delta(0)=a$, $\gamma(1)=\delta(1)=b$). אזי לכל $e\in p^{-1}(\gamma(0))$ מתקיים $\hat{\gamma}^e(1)=\hat{\delta}^e(1)$.

<u>הוכחה:</u>

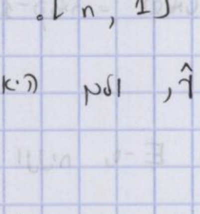
נתונה הומוטופיה $H:I\times I\to B$.



באופן דומה למשפט הקודם, ניתן

להרים את H (מחלקים את הריבוע לריבועים קטנים יותר, ודואגים שהחיבור

בכל שלב קשיר). קיבלנו הרמה

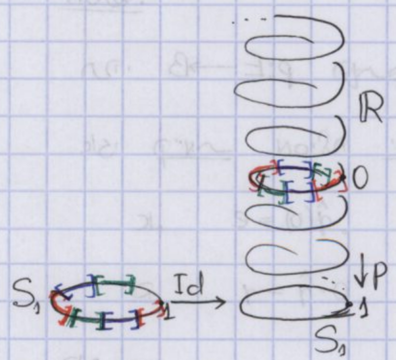


(הצדדים חייבים להיות קבועים כי הרמה של מסילה קבועה היא קבועה).

הערה:

מההוכחה קיבלנו אפילו יותר - $\hat{\delta}^e \simeq_{\partial I} \hat{\gamma}^e$.

דוגמה:



ניתן דוגמה לפונקציה שאינה ניתנת להרמה.

הבעיה היא בקטע האחרון - אז החיתוך אינו קשיר; הוא שתי נקודות.

הגדרה:

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית X נקרא פשוט קשר אם כל העתקה $S^1 \to X$ היא נול-הומוטופית.

הערה: (הופיעה בתרגיל בית 4)

מרחב X הוא פשוט קשר אם ורק אם לכל $\gamma, \delta : I \to X$ המקיימים $\gamma(0)=\delta(0)$ ו-$\gamma(1)=\delta(1)$, מתקיים $\delta \simeq_{\partial I} \gamma$.

הערה:

X קשיר מסילתית אם ורק אם כל העתקה $S^0 \to X$ היא נול-הומוטופית.

$S^0 = \partial D^1 = \{-1,1\}$, $D^1 = [-1,1]$ מרחב דיסקרטי עם שתי נקודות.

הגדרה:

מרחב טופולוגי X נקרא n-קשיר אם כל העתקה $S^k \to X$ נול הומוטופית לכל $0 \le k < n$.

לכן, 0-קשיר = קשיר מסילתית; 1-קשיר = פשוט קשר.

משפט:

תהי $p: E \to B$ העתקת כיסוי, ונניח ש-E פשוט קשר. אזי לכל שתי מסילות $\gamma, \delta : I \to B$ המקיימות $\gamma(0)=\delta(0)=a$, $\gamma(1)=\delta(1)=b$, $\hat{\gamma}^e(1)=\hat{\delta}^e(1)$ עבור איזשהו $e \in p^{-1}(a)$, אזי $\delta \simeq_{\partial I} \gamma$.

הוכחה:

E פשוט קשר, לכן יש הומוטופיה H ביחס לקצוות מ-$\hat{\gamma}^e$ ל-$\hat{\delta}^e$, ואז $p \circ H$ היא הומוטופיה ביחס לקצוות מ-γ ל-δ.

הערה:

כל מרחב כוויץ הוא פשוט קשר (ואפילו ח״ק קשיר לגמרי).

הוכחה:

X כוויץ, ולפי שאלה מתרגילי הבית, לכל מרחב טופולוגי Y כל העתקה $X \longrightarrow Y$ היא נל-הומוטופית.

משפט והגדרה:

תהי $p:E \longrightarrow B$ העתקת כיסוי. נבחר $b \in B$ ונבחר $e \in p^{-1}(b)$.

נגדיר $F: \pi_1(B, b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ באופן הבא: $F([\varphi]) := \hat{\varphi}^e(1)$.

(פונקציה זו מוגדרת היטב ממשפט הקודם - אם $[\varphi]=[\psi]$ אז $\psi \simeq_{\partial I} \varphi$)

א. אם E קשיר מסילתית, אז F על.

ב. אם E גם פשוט קשר, אז F חד-חד ערכית.

הוכחה:

א. תהי $x \in p^{-1}(b)$. E קשיר מסילתית ולכן יש מסילה δ מ-e ל-x.

$p \circ \delta$ מסילה מ-b ל-b, ולכן מייצגת איבר ב-$\pi_1(B, b)$, ומתקיים $\delta = \widehat{p \circ \delta}^e$.

ב. נניח $\hat{\varphi}^e(1) = \hat{\psi}^e(1)$. כיוון ש-$E$ פשוט קשר, ממשפט קודם,

$\psi \simeq_{\partial I} \varphi$, ולכן $[\varphi] = [\psi]$.

דוגמה:

$E = \mathbb{R}$ (כוויץ, ולכן פשוט קשר), $B = S^1$, $p: E \longrightarrow B$ נתונה ע"י

$$p(s) := e^{2\pi i s}$$

(S^1 מעגל היחידה ב-$\mathbb{C}$).

במקרה הזה ניקח $b = 1 \in S^1$, $0 \in p^{-1}(1)$, $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$,

ולכן, מהמשפט האחרון, $F: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ שהיא חד-חד ערכית ועל.

ניתן להראות שזהו הומומורפיזם.

טענה:

עבור ההעתקות הנ"ל, אם $F([\varphi]) = k$, אז לכל $m \in p^{-1}(1)$ מתקיים $\hat{\varphi}^m(1) = m + k$.

הוכחה:

ההעתקה $T_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $x \longmapsto x+m$ מקיימת $p \circ T_m = p$ (אכן $e^{2\pi i (x+m)} = e^{2\pi i x}$).

לכן, אם δ הרמה של γ, גם $T_m \circ \delta$ הרמה של γ, כי אם $\gamma = p \circ \delta$, גם $\gamma = p \circ \delta = p \circ (T_m \circ \delta)$

(המשך ההוכחה)

אם $\delta(0)=a$, אז $(T_m\circ\delta)(0)=a+m$. כלומר, מתקיים $T_m\circ\hat{\gamma}^e=\hat{\gamma}^{e+m}$.

<u>משפט:</u>

ההעתקה $F:\pi_1(S^1,1)\longrightarrow\mathbb{Z}$ שהוגדרה קודם, $F([\psi]):=\hat{\psi}^\circ(1)$, היא הומומורפיזם של חבורות.

<u>הוכחה:</u>

$$F([\varphi][\psi])=\widehat{\varphi*\psi}^\circ(1)=\hat{\psi}^{\hat{\varphi}^\circ(1)}(1)$$

נסמן $m=\hat{\varphi}^\circ(1)=F([\varphi])$. לכן

$$\hat{\psi}^{\hat{\varphi}^\circ(1)}(1)=\hat{\psi}^m(1)=\hat{\psi}^{0+m}(1)=T_m\circ\hat{\psi}^\circ(1)=T_m(F([\psi]))=F([\psi])+m=F([\psi])+F([\varphi])$$

כעת נוכל לחזור לענות על שאלה ששאלנו קודם.

שאלה - האם ∂D^2 הוא נסג של D^2?

<u>טענה:</u>

אם $A\subseteq X$ נסג, $i:A\longrightarrow X$ העתקת ההכלה ו-$a\in A$. אזי $i_*:\pi_1(A,a)\longrightarrow\pi_1(X,a)$ חד-חד ערכית.

<u>הוכחה:</u>

קיימת $r:X\longrightarrow A$ כך ש-$r\circ i=Id_A$. לכן $r_*\circ i_*=Id_{\pi_1(A,a)}$.

<u>דוגמה:</u>

נבדוק האם ∂D^2 הוא נסג של D^2. כיון ש- לנו $i_*:\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(S^1,1)}}\longrightarrow\underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(D^2,1)}}$

זה בכלל אפשרי שיהיה חד-חד ערכי.

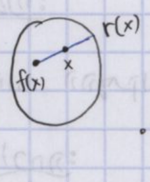
<u>משפט:</u> (משפט נקודת השבת של בראוור עבור D^2)

אם $f:D^2\longrightarrow D^2$ רציפה, אז קיים $a\in D^2$ כך ש-$f(a)=a$.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה שקיימת $f:D^2\longrightarrow\partial D^2$ כך ש- $f(x)\neq x$ לכל $x\in D^2$.

נגדיר $r:D^2\longrightarrow\partial D^2$ באמצעות f באופן הבא:



r רציפה - תרגיל. כמו כן, $r(a)=a$ לכל $a\in\partial D^2$.

3.12.14 טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 6

דוגמה:

ראינו ש- $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ נסג עוותי.

לכן $i_*:\pi_1(S^1,a)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\},a)$ איזומורפיזם. כלומר $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\},a)\cong\mathbb{Z}$.

משפט: (המשפט היסודי של האלגברה)

אם $p(z)$ פולינום עם מקדמים מרוכבים ממעלה חיובית, אז קיים $w\in\mathbb{C}$ כך ש- $p(w)=0$.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $p(z)$ פולינום ממעלה $n\geq 1$ כך ש- $p(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$, ונניח בה"כ שהמקדם העליון של p הוא 1.

כיוון ש- $p(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ניתן על ידי צמצום הטווח לחשוב על p כפונקציה $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

עבור $r>0$ נסמן ב- C_r את המעגל ב- $\mathbb{C}$ סביב הראשית שרדיוסו r.

אזי $p|_{C_r}:C_r\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$p|_{C_r}$ היא העתקה שניתנת להרחבה לפנים של הדיסק שרדיוסו r (שפתו היא C_r), שהרי p הוא הרחבה כזו; אם נסמן ב- D_r את הדיסק שרדיוסו r, אזי $p|_{D_r}:D_r\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$ היא הרחבה של $p|_{C_r}:C_r\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

מכאן ש- $p|_{C_r}:C_r\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ הוא נול-הומוטופי לכל $r>0$.

מצד שני, נראה שיש r מספיק גדול כך שלכל $z\in C_r$ מתקיים $|p(z)-z^n|<|z^n|$.

אכן, נסמן $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$; לכן $|p(z)-z^n|=|a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0|$,

ומכאן $\left|\frac{p(z)-z^n}{z^n}\right|=\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right|<1$ עבור $z\in C_r$ אם r מספיק גדול.

כלומר $|p(z)-z^n|<|z^n|$. נסמן $g(z)=z^n$.

מכאן שהקטע הישר המחבר בין $p|_{C_r}(z)$ ל- $g|_{C_r}(z)$ אינו כולל את הראשית, כלומר הקטע הנ"ל מוכל ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. לכן ניתן לרשום את ההומוטופיה מ- $p|_{C_r}$ ל- $g|_{C_r}$ באופן $H(z,t):=(1-t)p|_{C_r}(z)+tg|_{C_r}$.

ראינו ש- $p|_{C_r}:C_r\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$ נול הומוטופי, ולכן כעת קיבלנו ש- $g|_{C_r}:C_r\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$ היא נול-הומוטופית. אולם את ההומומורפיזם המושרה $g|_{C_r *}:\pi_1(C_r,r)\longrightarrow\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\},r^n)$ אנו מבינים היטב - הוא לוקח יוצר של החבורה הראשונה ל-n פעמים יוצר של החבורה השניה. כלומר זהו לא ההומומורפיזם הטריוויאלי, בסתירה לכך שזוהי העתקה נול-הומוטופית.

פרק ג חבורות

__דיון:__

נתונות שתי חבורות G ו-H. אנו מתעניינים בזוגות של הומומורפיזמים ל-G ול-H מ-K חבורה כלשהי:

$$\begin{tikzcd} & & G \\ K \arrow[r, "{(g,h)}"] \arrow[urr, bend left, "g"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & G\times H \arrow[ur, "p_G"] \arrow[dr, "p_H"'] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

נראה שאם המצב הוא כפי שתואר, קיים הומומורפיזם יחיד מ-K ל-$G\times H$ שהרכבות של ההטלות עליו "יתנו" את הפונקציות המקוריות.

נגדיר $x\longmapsto (g(x),h(x))$ מ-K ל-$G\times H$. זהו הומומורפיזם, כי

$$x\cdot y\longmapsto (g(x\cdot y),h(x\cdot y))=(g(x)g(y),h(x)h(y))=(g(x),h(x))(g(y),h(y))$$

__משפט:__

אם $(U_1,\varphi_1:U_1\to G,\psi_1:U_1\to H)$ ו-$(U_2,\varphi_2:U_2\to G,\psi_2:U_2\to H)$ שני אובייקטים אוניברסליים כנ"ל. אזי יש איזומורפיזם $F:U_1\longrightarrow U_2$ כך ש-$\varphi_2\circ F=\varphi_1$ ו-$\psi_2\circ F=\psi_1$.

__הוכחה:__

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"] \arrow[d, shift left, "L_{12}"] & G \\ U_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[u, shift left, "L_{21}"] & H \end{tikzcd}$$

אם נתייחס ל-U_1 כאל האובייקט האוניברסלי ואל U_2 כאל K, קיים הומומורפיזם $L_{21}:U_2\longrightarrow U_1$ המקיים את התנאים הנ"ל. נחליף את התפקידים ונקבל הומומורפיזם $L_{12}:U_1\longrightarrow U_2$.

נסתכל על $L_{21}\circ L_{12}:U_1\longrightarrow U_1$; נוכיח שהוא מקיים $\varphi_1\circ(L_{21}\circ L_{12})=\varphi_1$

$\psi_1\circ(L_{21}\circ L_{12})=\psi_1$

אכן $\varphi_1\circ(L_{21}\circ L_{12})=\varphi_2\circ L_{12}=\varphi_1$ וכנ"ל עבור ψ.

אולם גם Id_{U_1} מקיימת תנאי זה, וכיוון שיש הומומורפיזם יחיד המקיים זאת בהכרח $L_{21}\circ L_{12}=Id_{U_1}$. באותו אופן $L_{12}\circ L_{21}=Id_{U_2}$,

ולכן L_{12} איזומורפיזם המקיים את התנאים לגבי $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$.

עתה מתעניינים בתכונה האוניברסלית הדואלית, כלומר באותו התנאי בהיפוך חצים.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "g"] & & \\ & U \arrow[r, "\exists! L"] & K \\ H \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

נתחיל מאיחוד זר $G \sqcup H$. נסמן ב-W את קבוצת כל המילים

באותיות שהן איברי $G \sqcup H$.

(אנחנו מניחים מלכתחילה ש-G ו-H זרות; $G \cap H = \emptyset$).

מילה היא סדרה סופית $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, **והאותיות** שלה הן האיברים $a_1, \dots, a_n$.

למשל המילה הריקה היא ().

על W נגדיר יחס שקילות באופן הבא:

א. $(\underline{A}, g_i, g_j, \underline{B}) \sim (\underline{A}, g_i g_j, \underline{B})$ עבור רצף של שתי אותיות מ-G.

ב. $(\underline{A}, h_i, h_j, \underline{B}) \sim (\underline{A}, h_i h_j, \underline{B})$ עבור רצף של שתי אותיות מ-H.

ג. ~~[illegible]~~ אם מופיעים איברי היחידה $1_G, 1_H$ ניתן להשמיט אותם.

$\sim$ הוא יחס השקילות הנוצר על ידי היחסים שנתנו לעיל.

נסמן ב- $G*H$ את קבוצת מחלקות השקילות.

<u>טענה:</u>

$G*H$ היא חבורה ביחס לפעולה המושרית על ידי שרשור.

<u>הגדרה:</u>

החבורה $G*H$ נקראת **המכפלה החופשית** של G ושל H.

10.12.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 7

תזכורת:

בהינתן שתי חבורות G ו-H, הגדרנו $W=W(G\amalg H)$, והגדרנו יחס שקילות $\sim$ על W לפי:

$$(\underline{A}, g_1, g_2, \underline{B}) \sim (\underline{A}, g_1g_2, \underline{B}) \ ; \ (\underline{A}, 1_G, \underline{B}) \sim (\underline{A}, \underline{B})$$

וכנ"ל עבור H.

$G*H$ היא קבוצת מחלקות השקילות, והגדרנו כפל של מחלקות ע"י שרשור הנציגים.

נבדוק שזה מוגדר היטב:

$$[(g_1, h_2, h_3, g_4, \dots, g_n)][(h'_1, g'_2, \dots)] = [(g_1, h_2, \dots, g_n, h'_1, g'_2, \dots)]$$

אם נחליף נציגים, זה שקול לשימוש ביחס השקילות מספר סופי של פעמים.

נבצע את אותן פעולות בצד ימין, ונגיע לשרשור הנציגים.

האסוציאטיביות מתקיימת כי השרשור אסוציאטיבי.

היחידה היא $[()]$ - המחלקה של המילה הריקה.

ההופכי הוא להפוך כל איבר ולכתוב בסדר הפוך, למשל,

$$[(g_1, h_2, h_3, g_4, g_5)][(g_5^{-1}, g_4^{-1}, h_3^{-1}, h_2^{-1}, g_1^{-1})] = [()]$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i"] & \\ & G*H \\ H \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

כעת נבדוק את התכונה האוניברסלית.

נגדיר $i(g) := [(g)]$ ו- $j(y) = [(y)]$.

i הומומורפיזם, כי לכל $g,g'\in G$ מתקיים $i(g)\,i(g') = [(g)][(g')] = [(g,g')] = [(gg')] = i(gg')$.

באופן דומה, j הומומורפיזם.

כעת תהי K חבורה ויהיו $\varphi: G\longrightarrow K$, $\psi: H\longrightarrow K$ הומומורפיזמים.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] & & \\ & G*H \arrow[r, "L"] & K \\ H \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

רוצים לבנות $L: G*H\longrightarrow K$ שישמור את הדיאגרמה ושיהיה יחיד.

נשים לב ש- $[(g_1, g_2, h_3)] = [(g_1)][(g_2)][(h_3)]$, ומכאן ש- $i(G)\cup j(H)$ היא קבוצת יוצרים של $G*H$.

אין ברירה (יחידות) אלא להגדיר $L([(g)]) = L(i(g)) = \varphi(g)$ ו- $L([(h)]) = L(j(h)) = \psi(h)$, ולכן נגדיר

$$L([(g_1, g_2, h_3, h_4, g_5)]) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\psi(h_3)\psi(h_4)\varphi(g_5)$$

כי φ הומומורפיזם

אם ניקח נציג שקול, נקבל אותו דבר: $L([(g_1g_2, h_3, h_4, g_5)]) = \varphi(g_1g_2)\psi(h_3)\psi(h_4)\varphi(g_5)$.

$$L([(g_1, 1_H, g_2, h_3, h_4, g_5)]) = \varphi(g_1)\psi(1_H)\varphi(g_2)\psi(h_3)\psi(h_4)\varphi(g_5)$$

L גם הומומורפיזם, למשל,

$$L([(g_1,h_2)][(h_3,g_4)]) = L([(g_1,h_2,h_3,g_4)]) = \underbrace{\varphi(g_1)\psi(h_2)}_{L([(g_1,h_2)])}\underbrace{\psi(h_3)\varphi(g_4)}_{L([(h_3,g_4)])}$$

ניתן לבדוק ש- $L\circ i=\varphi$ וש- $L\circ j=\psi$. לכל $g\in G$,

$$(L\circ i)(g) = L([g]) = \varphi(g)$$

תהי G חבורה. נסתכל על ההומומורפיזמים $\varphi: G\to K$ φ ש-K אבלית.

קטגוריית החבורות

קטגוריית החבורות האבליות

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & K \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

רוצים למצוא חבורה אבלית U והומומורפיזם $\rho: G\to U$

φ שלכל K אבלית יהיה קיים ויחיד הומומורפיזם $L:U\to K$ שעבורו $L\circ\rho=\varphi$.

נראה ש- $U = G/[G,G]$.

ניזכר כי $[G,G]:=N(\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b\in G\})$ תת-החבורה הנורמלית הנוצרת ע"י האיברים מהצורה $aba^{-1}b^{-1}$ (קומוטטורים).

נסתכל על הקבוצה $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b\in G\}$. נראה כי היא סגורה תחת הופכיים ותחת לקיחת צמודים:

$$(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$$

$$g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}$$

לכן, תת החבורה הנורמלית המינימלית המכילה את הקבוצה הזו היא בעצם תת-החבורה המינימלית המכילה אותה. נסמנה $[G,G]$.

$G/[G,G]$ אבלית, כי כל איבר מהצורה $xyx^{-1}y^{-1}$ במנה הוא 1;

והרי $xyx^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy=yx$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & K \\ G/N \arrow[ur, dashed, "L"'] & \end{tikzcd}$$

מתורת החבורות, אנו יודעים שאם $N\trianglelefteq G$ נורמלית,

שאם $\varphi:G\to K$ הומומורפיזם, אזי קיים L שעבורו $\varphi = L\circ\rho$

אם ורק אם $N\subseteq\ker\varphi$, ואז הוא יחיד.

נקבל במקרה שלנו שקיים L כזה אם ורק אם $[G,G]\subseteq\ker\varphi$.

ניתן להראות שאם $\varphi: G\to K$ הומומורפיזם ו-K אבלית אזי $[G,G]\subseteq\ker\varphi$.

מספיק להראות שהיוצרים של $[G,G]$ בגרעין של φ.

במילים אחרות, צריך להראות שלכל $a,b\in G$, $\varphi(aba^{-1}b^{-1})=1$ - אבל זה נכון.

החבורה $G/[G,G]$ נקראת האבליניזציה (איבול) של G, ומסומנת $Ab(G)$.

הפעם, נתונים שלוש חבורות ושני הומומורפיזמים.

נרצה למצוא חבורה U והומומורפיזמים $i':G\to U$, $j':H\to U$

כך שלכל חבורה K ולכל זוג הומומורפיזמים $\varphi:G\to K$, $\psi:H\to K$ שעבורם $\varphi\circ\alpha=\psi\circ\beta$ יהיה קיים הומומורפיזם יחיד $L:U\to K$ שסוגר את הדיאגרמה.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "i'"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ P \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & U \arrow[r, dashed, "\exists! L"] & K \\ & H \arrow[u, "j'"'] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

נגדיר את החבורה

$$U = G*H \Big/ N\left(\{ i(\alpha(x))\cdot j(\beta(x))^{-1} \mid x\in P\}\right)$$

כאשר i ו-j ההומומורפיזמים שהוגדרו עבור $G*H$.

נבנה את i' ואת j', לפי הדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i"] & & \\ & G*H \arrow[r, "\rho"] & U = G*H/N \\ H \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

ואז $i'=\rho\circ i$ ו- $j'=\rho\circ j$.

נוכיח שהדיאגרמה מתחלפת. לכל $x\in P$, $i'\alpha(x)=\rho\, i\alpha(x)$, $j'\beta(x)=\rho\, j\beta(x)$.

לכן, $(i'\alpha(x))(j'\beta(x))^{-1}=\rho(i\alpha(x))\,\rho(j\beta(x))^{-1}=\rho\big(\underbrace{(i\alpha(x))(j\beta(x))^{-1}}_{\in N}\big)=1$.

בסך הכל, $i'\circ\alpha=j'\circ\beta$.

לפי התכונה האוניברסלית של $G*H$, קיים הומומורפיזם יחיד $Y:G*H\to K$

שעבורו $Y\circ i=\varphi$ ו- $Y\circ j=\psi$. לכן, יוגדר L אם ורק אם $N\subseteq \ker Y$.

מספיק לבדוק על היוצרים של N, $(i\,\alpha(x))(j\beta(x))^{-1}$ אבל

$$Y i\alpha(x)\left(Y j\beta(x)\right)^{-1}=(\varphi(\alpha(x)))(\psi(\beta(x))^{-1})=1$$

נסמן את החבורה הזו $\underset{\alpha\nwarrow P\nearrow\beta}{G*H}$.

בדרך כלל מתרשלים וכותבים $G \underset{P}{*} H$.

החבורה $\underset{\beta\nwarrow P\nearrow\alpha}{G*H}$ נקראת מכפלה היתוך (של G ו-H לאורך P).

עתה, נתונה קבוצה X.

קטגוריה של קבוצות | קטגוריה של חבורות

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & U \arrow[r, dashed, "\exists! L"'] & G \end{tikzcd}$$

נגדיר $X \amalg Y$, כאשר $Y = \{x^{-1} \mid x \in X\}$.

קישוט, לא הופכי!

נסתכל על $W = \omega(X \amalg Y)$.

נגדיר על W יחס שקילות $(x_1, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}, x_4) \sim (x_1, x_2^{-1}, x_4)$.

$$(x_1, x_2^{-1}, x_2, x_3) \sim (x_1, x_3)$$

את קבוצת מחלקות השקילות נסמן $F(X)$, ונגדיר עליה מבנה של חבורה על ידי שרשור של נציגים.

מוגדר היטב - כמו בהוכחה עבור $G*H$.

אסוציאטיביות - נובע משרשור, איבר יחידה - $[()]$.

הופכי: $[(x_1, x_2^{-1}, x_3)][(x_3^{-1}, x_2, x_1^{-1})] = [()]$.

אם כן, ההופכי של $[(x_1)]$ הוא $[(x_1^{-1})]$.

את $\alpha : X \to F(X)$ נגדיר לפי $x \mapsto [(x)]$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & G \\ & F(X) \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd}$$

שכן, אין ברירה (יחידות) אלא להגדיר

$$L([(x_1, x_2^{-1}, x_3)]) = f(x_1) f(x_2)^{-1} f(x_3)$$

נראה שזה מוגדר היטב:

$$[(x_1, x_2, x_2^{-1}, x_3)] \rightsquigarrow f(x_1) f(x_2) f(x_2)^{-1} f(x_3)$$
$$\parallel$$
$$[(x_1, x_3)] \rightsquigarrow f(x_1) f(x_3)$$

$F(X)$ נקראת החבורה החופשית על X.

17.12.14   טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 8

הגדרה:

מילה ב-יוצרים מ-X תיקרא מצומצמת אם לא מופיע רצף x,x^{-1} או x^{-1},x.

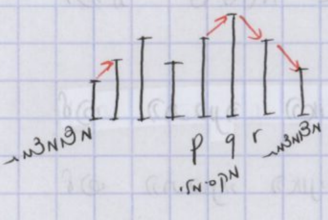
משפט:

לכל איבר ב-$F(X)$ יש נציג יחיד שהוא מילה מצומצמת (והיא גם הקצרה ביותר).

הוכחה:

הקיום ברור - לוקחים איזשהו נציג ומצמצמים אותו.

כעת נרצה להוכיח יחידות. בהינתן שתי מילים מצומצמות שקולות, נוכיח את הטענה באינדוקציה על סכום האורכים של המילים המתקבלות במהלך ההרחבות והצמצומים, כלומר מהלכי יחס השקילות.



נסמן ב-q את המילה מאורך מקסימלי המתקבלת בתהליך, ב-p את המילה שלפניה וב-r את המילה שאחריה.

נחלק לכמה מקרים:

א. $r=(\underline{A},\underline{B},x,x^{-1},\underline{C}) \leftarrow q=(\underline{A},y,y^{-1},\underline{B},x,x^{-1},\underline{C}) \leftarrow p=(\underline{A},y,y^{-1},\underline{B},\underline{C})$.

אז אפשר במקום q לשים את $q'=(\underline{A},\underline{B},\underline{C})$, וזו מילה קצרה מ-q ב-4.

ב. $r=(\underline{A},\underline{B}) \leftarrow q=(\underline{A},x,x^{-1},\underline{B}) \leftarrow p=(\underline{A},\underline{B})$

אז אפשר לוותר על q ועל r, וסכום האורכים קטן.

ג. $r=(\underline{A},x,\underline{B}) \leftarrow q=(\underline{A},\underbrace{\overbrace{x,x^{-1},x}^{\text{הוספנו}}}_{\text{צמצמנו}},\underline{B}) \leftarrow p=(\underline{A},x,\underline{B})$.

שם אפשר לוותר על q ועל r.

תמיד הצלחנו להקטין את סכום אורכי המילים, ולכן סיימנו.

הערה:

מהיום נסמן את האיברים ב-$F(X)$ בסימון $xyy^{-1}x=xx=x^2$,

$x_1x_1x_1x_7x_7x_3^{-1}x_3^{-1}x_3^{-1}x_3^{-1}=x_1^3x_7^2x_3^{-4}$.

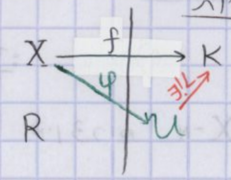
דוגמה:

ב-$F_2=F(\{x,y\})$, $xy\neq yx$. בפרט F_2 אינה אבלית.

כמו כן $x^n\neq x^m$ עבור $n\neq m$, ולכן F_2 אינסופית.

נעבור לבנייה הבאה.

חבורות



נתונה קבוצה X, ונתונה קבוצת מילים R באותיות מ-X ומהופכיהן.

מתעניינים בפונקציות f מ-X לחבורה K כלשהי,

כך שכל מילה ב-R, מכפלת האיברים המתאימים ב-K היא 1.

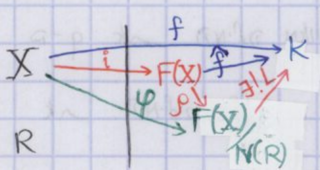
למשל, אם $x_1^2x_7^{-3}x_4\in R$, אז f צריכה לקיים $f(x_1)^2f(x_7)^{-3}f(x_4)=1$

(כפל בחבורה K).

ניקח $U:=F(X)/N(R)$ ו- $\varphi(x)=\bar{x}$

המחלקה המיוצגת ע"י $[(x)]$, כלומר $[x]N(R)$.

ברור ש-φ מקיימת את התנאי על f, כי x_i יעבור לעצמו, ואז המכפלה תהיה ב-$N(R)$ ⇐ תהיה 1.



נותר לבדוק את התכונה האוניברסלית.

לפי התכונה האוניברסלית של $F(X)$, קיים

הומומורפיזם יחיד $\hat{f}:F(X)\to K$ כך ש- $\hat{f}\circ i=f$.

נותר לבדוק האם מושרה הומומורפיזם יחיד על U, כלומר לבדוק האם $N(R)\subseteq\ker\hat{f}$.

אבל ודאי שזה מתקיים, כי $R\subseteq\ker\hat{f} \Rightarrow N(R)\subseteq\ker\hat{f}$.

אם X ו-R סופיות, אפשר לכתוב גם בצורה הבאה:

$$\langle \underbrace{a,b,c}_{\text{יוצרים}} \mid \underbrace{ab^2c^{-1},\ a^7}_{\text{יחסים}}\rangle = F(\{a,b,c\})/N(\{ab^2c^{-1},a^7\})$$

במקרה זה, $ab^2=c$, ולכן אפשר לכתוב את ab^2c^{-1} באופן $ab^2=c$.

אז, כדי שיהיה נוסח אחיד, תמיד נוסיף את השוויון:

$$\langle a,b,c \mid ab^2=c,\ a^7=1\rangle$$

החבורה הטריוויאלית היא $\{1\}=\langle 1\rangle$.

החבורה החופשית עם שלושה יוצרים היא $F_3=\langle a,b,c\mid\ \rangle$.

הבנייה הזו נקראת הצגה של חבורה ע"י יוצרים ויחסים.

משפט:

לכל חבורה G יש הצגה ע"י יוצרים ויחסים.

הוכחה:

בהינתן חבורה G, ניקח $X=G$ ו- $R=$ כל לוח הכפל של G.

דיון:

נתון מרחב טופולוגי X ויחס שקילות $\sim$ על X. נסמן $\hat{X}=X/\sim$.

כדי להגדיר פונקציה רציפה $g:\hat{X}\longrightarrow Y$

צריך להגדיר פונקציה רציפה $f:X\longrightarrow Y$

המכבדת את יחס השקילות $(a\sim b \Longrightarrow f(a)=f(b))$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \\ \hat{X} \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

כעת נרצה להגדיר הומוטופיה על מרחב המנה $\hat{X}$.

הרעיון הבסיסי הוא להגדיר הומוטופיה $H:X\times I\longrightarrow Y$

המכבדת את יחס השקילות ($a\sim b \Leftarrow$ לכל $t\in I$

מתקיים $H(a,t)=H(b,t)$), ואז תשרה הומוטופיה $\hat{H}$ כדרוש.

$$\begin{tikzcd} X\times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\rho\times Id_I"'] & Y \\ \hat{X}\times I \arrow[ur, "\hat{H}"'] & \end{tikzcd} \qquad (a,t)\mapsto(\rho(a),t)$$

אבל לרוב, מכפלה של העתקות מנה אינה העתקת מנה; עם זאת, אם

אחת ההעתקות היא הזהות, וגם המרחב מקיים תנאי כלשהו (אולי קומפקטי

מקומי), אז המכפלה היא העתקת מנה, ואז זה יעבוד.

למשל, אם $X\times I$ קומפקטי ואם $\hat{X}\times I$ האוסדורף, זה יעבוד.

שקול: X קומפקטי ו- $\hat{X}$ האוסדורף.

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 9

משפט ון קמפן:

יהי X מרחב טופולוגי, $\mathcal{U},V\subseteq X$ פתוחות, $\mathcal{U}\cup V=X$, ו-$\mathcal{U}\cap V$ אינו ריק וקשיר מסילתית. נניח גם ש-$\mathcal{U}$ ו-V קשירים מסילתית (אין צורך בהנחה זו, אך גם אין הפסד בלהניח אותה - נקודה זו תובהר בתרגיל).

נבחר $a\in \mathcal{U}\cap V$. דיאגרמת ההכלה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U} \arrow[dr, "k"] & \\ \mathcal{U}\cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

(i, j, k ו-l הכלות).

נסמן $G=\pi_1(\mathcal{U},a)$, $H=\pi_1(V,a)$, $P=\pi_1(\mathcal{U}\cap V,a)$ ו- $K=\pi_1(X,a)$.

הפונקטור שהגדרנו משרה את הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "k_*"] \arrow[d] & \\ P \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & G \underset{i_*\,P\,j_*}{*} H \arrow[r, dashed, "L"] & K \\ & H \arrow[ur, "l_*"'] \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

אם כן, משרה הומומורפיזם $L: G \underset{i_*\,P\,j_*}{*} H \longrightarrow K$.

אזי L הוא איזומורפיזם.

הכנה להוכחה:

כל מילה ב- $G \underset{i_*\,P\,j_*}{*} H$ מורכבת מאותיות, כשכל אות היא מסילה $\varphi_1\psi_2\varphi_3\psi_4\psi_5$, תחת שלוש שכבות של יחס שקילות:

א. של π_1 - הומוטופיה ביחס ל-∂I.

ב. של $G*H$ - אפשר להחליף את $\psi_4\psi_5$ בשרשור שלהן...

ג. של המנה - אם יש לי איבר בתמונה של i_* (j_*), אפשר לחשוב עליו גם כעל מסילה ב-$\mathcal{U}$ וגם כעל מסילה ב-V, ואם הוא, למשל, נול-הומוטופי ביחס לקצוות ב-$\mathcal{U}$ אפשר "להעלים" אותו.

ההומומורפיזם L שולח, בעצם, כל מסילה לעצמה.

הוכחה:

לכל $x\in X$ נבחר אחת ולתמיד מסילה γ_x מ-a ל-x כך שיתקיים:

א. אם $x\in U$, תמונת γ_x מוכלת ב-U.

ב. אם $x\in V$, תמונת γ_x מוכלת ב-V.

ג. אם $x\in U\cap V$, תמונת γ_x מוכלת ב-$U\cap V$.

ד. $\gamma_a = K_a$.

בהינתן מסילה $\varphi: I\longrightarrow X$, נגדיר $\widehat{[\varphi]} := [\gamma_{\varphi(0)}][\varphi][\overline{\gamma_{\varphi(1)}}]$.

מתקיימות התכונות הבאות:

א. $\widehat{[\varphi][\psi]}=\widehat{[\varphi]}\widehat{[\psi]}$.

ב. אם תמונת φ מוכלת ב-U, אז גם תמונת $\hat{\varphi}$ מוכלת ב-U.

ג. כנ"ל עבור V.

ד. כנ"ל עבור $U\cap V$.

ה. אם $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$, אזי $\widehat{[\varphi]}=[\varphi]$.

נוכיח כי L הוא על: בהינתן $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$, צריך להוכיח שהוא בתמונת L.

מהגדרת $G\underset{P}{*}H$ ומהגדרת L, אנו רואים שמה שצריך להוכיח הוא שיש $[\varphi_1][\varphi_2]\dots[\varphi_n]$ איברים ב-$\pi_1(U,a)$ וב-$\pi_1(V,a)$, כך שכאשר מביטים בהם כאיברים ב-$\pi_1(X,a)$, מכפלתם היא $[\varphi]$.

בהינתן $\varphi: I\longrightarrow X$, נביט ב-$\varphi^{-1}(U),\varphi^{-1}(V)$. זהו כיסוי פתוח של I.

I הוא מרחב מטרי קומפקטי, ולכן יש מספר לבג עבור כיסוי זה, כלומר אם נחלק את I לקטעים מספיק קטנים $I_1,I_2,\dots,I_n$, אז לכל i יתקיים $I_i\subseteq\varphi^{-1}(U)$ או $I_i\subseteq\varphi^{-1}(V)$. במילים אחרות, לכל i יתקיים $\varphi(I_i)\subseteq U$ או $\varphi(I_i)\subseteq V$.

נגדיר $\overset{*}{\varphi_i} := \varphi|_{I_i}$. אזי $\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\dots,\hat{\varphi}_n$ לולאות המתחילות ומסתיימות ב-a, ולכל i תמונת $\hat{\varphi}_i$ מוכלת ב-U או מוכלת ב-V.

כמו כן, $\hat{\varphi}_1\dots\hat{\varphi}_n \underset{\partial I}{\simeq} \widehat{\varphi_1\dots\varphi_n}=\hat{\varphi}\underset{\partial I}{\simeq}\varphi$. לכן L הוא על.

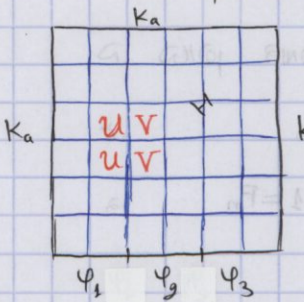
* φ_i הוא $\varphi|_{I_i}$ ששינינו את הפרמטר כך שיהיה ב-I.

(המשך ההוכחה)

נוכיח כי L הוא חד-חד ערכי: נניח $L([\varphi_1][\psi_2][\psi_3][\varphi_4])=1$. צ"ל $[\varphi_1][\psi_2][\psi_3][\varphi_4]=1$.

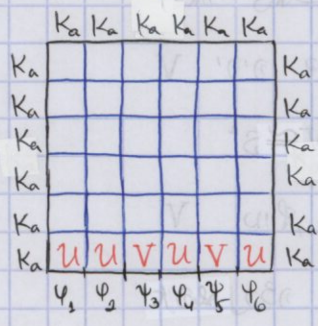
נזכור שכאשר אנו חושבים על φ_i ועל ψ_i כעל לולאות ב-X, אזי מכפלת $[\varphi_1][\psi_2]\ldots[\ldots]$ על-הומוטופית. נניח ש-H היא על-הומוטופיה כזו.

נביט ב-$H^{-1}(U), H^{-1}(V)$. זהו כיסוי פתוח של $I\times I$. $I\times I$ הוא מרחב מטרי קומפקטי, ולכן אם נחלק את $I\times I$ לחלקים קטנים מספיק, כל חלק יהיה מוכל ב-$H^{-1}(U)$ או ב-$H^{-1}(V)$.



על ידי חלוקה למספר גדול יותר של חלקים, אפשר לדאוג שכל חלוקה שהופיעה בצלע התחתונה נמצאת על אחד מהישרים האנכיים של החלוקה לריבועים.

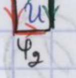
לכן נוכל לחלק את φ_1 למסילות קטנות יותר, כך שתמונת כל מסילה ב-U או ב-V (לפי החלוקה הגדולה יותר)



(מעתה לא נרשום כובעים, אך נזכור שכובעים מופיעים בכל מקום שהם אמורים להופיע בו).

מותר להוסיף K_a במילה, תוך המסילה הומוטופית ל-K_a.

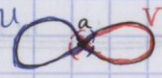
נסתכל על הריבוע השמאלי-תחתון:  K_a המסלות האדומה והירוקה הומוטופיות כי כך ביחס לקצוות ולכן מותר להחליף את $K_a\varphi_1$ במסילה הירוקה.

עוברים לריבוע הבא,  ושוב אפשר להחליף את המסילה האדומה במסילה הירוקה.

בריבוע הבא, $\to\pi_1(U)$, הצלע השמאלית נמצאת ב-$\pi_1(U)$. אבל היא גם ב-$\pi_1(V)$, וכך אפשר לחשוב עליה כעל מסילה ב-$\pi_1(V)$.

כך מורידים עוד ועוד ריבועים, עד שמגיעים להומוטופיה ל-K_a.

<u>דוגמאות:</u>



א. מרחב ה-8 (מתגולר הסאטלר), מסומן גם $S^1 \vee S^1$.

נבחר $\mathcal{U}$ בתור ו-V בתור .

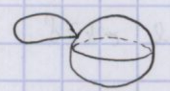
אזי $\pi_1(\mathcal{U},a)\cong F_1$, $\pi_1(V,a)\cong F_1$. $\mathcal{U}\cap V$ כוויץ (x), ולכן $\pi_1(\mathcal{U}\cap V, a)=1$.

לכן, לפי משפט ון קמפן, $\pi_1(S^1\vee S^1,a)\cong \pi_1(\mathcal{U},a) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V,a)} \pi_1(V,a) = \pi_1(\mathcal{U},a)*\pi_1(V,a)\cong$

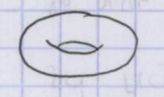
$\cong F_1 * F_1 \cong F_2$

ב. באופן דומה נפעל עבור $S^1\vee S^1\vee S^1$, ונקבל $\pi_1(S^1\vee S^1\vee S^1, a)\cong F_3$.

ג. $\pi_1(\underbrace{S^1\vee S^1\vee\dots\vee S^1}_{n\ \text{פעמים}}, a)\cong F_n$.

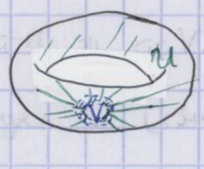


ד. $\pi_1(S^1\vee S^2, a)\cong \pi_1(S^1,a) * \pi_1(S^2,a)\cong F_n * 1 = F_n$.



ה. אנו יודעים שהחבורה היסודית של טורוס היא $\mathbb{Z}^2=F_1\times F_1$.

נראה זאת באמצעות ון-קמפן.



V יהיה דיסק פתוח, ו-$\mathcal{U}$ יהיה V^c עם מעט חפיפה.

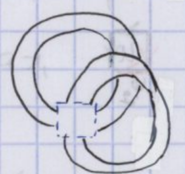
$\mathcal{U}\cap V\simeq S^1$, ולכן $\pi_1(\mathcal{U}\cap V, a)\cong F_1$.

V כוויץ, ולכן $\pi_1(V,a)\cong 1$.

כעת נרצה לחשב את $\pi_1(\mathcal{U},a)$. $\mathcal{U}$ הוא הטורוס עם חור.

אפשר להרחיב את החור בכיוון ↺, ואז בכיוון ↻.

אבל זה הומיאומורפי להצגה קלה:



ובאופן שקול  . למרחב הזה יש נסג עוות (באדום).

כעת נותר להבין מיהו i_*. החיתוך $\mathcal{U}\cap V$ מהווה מסגרת דקה מסביב לשפה של המרחב, ולכן הומיאומורפי לטבעת. היוצר של החבורה היסודית מתברר להיות $aba^{-1}b^{-1}$ (בכחול). הדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} & \langle a,b \mid \rangle \\ \langle c \mid \rangle \arrow[ur, "c\mapsto aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[dr] & \\ & \langle \mid \rangle \end{tikzcd}$$

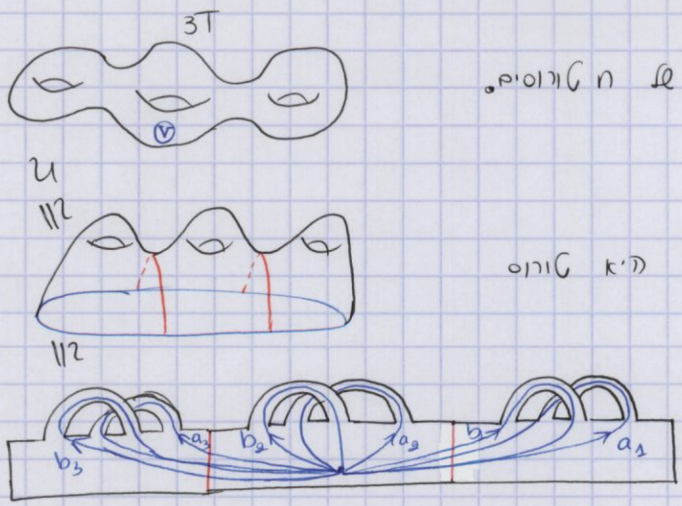
ולכן, לפי תרגיל מתרגילי הבית,

$$\pi_1(T, c)=\langle a,b \mid a^{-1}b^{-1}\rangle = \mathbb{Z}^2$$

דוגמה:

נרצה להסתכל על הסכום הקשיר של n טורוסים.

מסמנים זאת nT.



כל חתיכה מהחתיכות שהראנו היא טורוס

עם חור.

הדיאגרמה תהיה:

$$\begin{tikzcd} \langle c \mid \ \rangle \arrow[r, "c \mapsto a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}"] \arrow[d] & \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid \ \rangle \\ \langle \ \mid \ \rangle & \end{tikzcd}$$

אם כן, שוב לפי התרגיל,

$$\pi_1(nT) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle$$

נראה ש- $\pi_1(nT) \ncong \pi_1(mT)$ עבור $n \neq m$.

$$Ab(\pi_1(nT)) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \mid \cancel{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}}, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, \dots, a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}^{2n}$$

דוגמה:

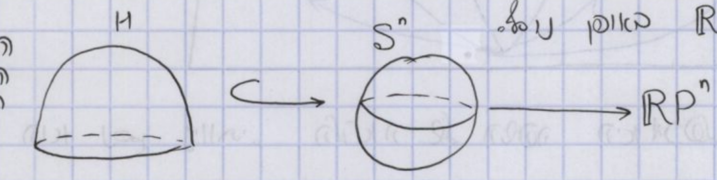
המרחב הפרויקטיבי הוא $\mathbb{RP}^n := S^n/_{v\sim -v}$. עבור $n=2$ נסמן בקיצור P, ונקרא לו המישור הפרויקטיבי.

העתקת המנה $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ היא העתקת כיסוי.

כשחישבנו את החבורה היסודית של S^1 זיהינו כל מסילה ב-$\pi_1(S^1)$ עם הסיב המתאים לנקודת הבסיס (זו התאמה חד-חד ערכית ועל, כי מרחב הכיסוי הוא פשוט קשר).

עבור $2\le n$, S^n הוא פשוט קשר, ולכן הטיעון הנ"ל עובד; בסיב יש שני איברים בדיוק, ולכן עבור $2\le n$, $\pi_1(\mathbb{RP}^n)\cong \mathbb{Z}/_2$. מה עם $n=1$?

ננסה להציג את $\mathbb{RP}^n$ באופן נוסף.



$\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^{n+1} \mid x_{n+1}\ge 0\}$

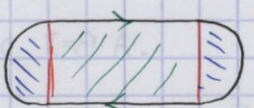
הרכבת ההעתקות $H \hookrightarrow S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ תהיה העתקת מנה (כי H קומפקטי ו-$\mathbb{RP}^n$ האוסדורף). לכן $\mathbb{RP}^n$ גם מרחב מנה של H.

אבל, עד כדי הטלה, $H\cong D^n$ (הדיסק ה-n-מימדי). לכן,

$$D^n/_{\text{זיהוי נקודות אנטיפודיות על השפה}} \cong \mathbb{RP}^n$$

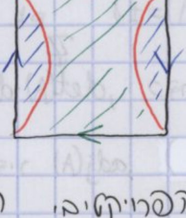
לכן, אם $n=1$, $D^1=[-1,1]$, ולכן יחס השקילות בו מדביק את הקצוות. בסך הכל, $\mathbb{RP}^1\cong S^1$.

ניתן הצגה שנייה ל-$\mathbb{RP}^n$. נסתכל על המקרה $n=2$.



(זה בעצם דיסק)
(אבל עם חלקים שטוחים)

החלק הירוק הוא טבעת מוביוס, והחלק הכחול הוא דיסק.



בסך הכל, המישור הפרויקטיבי הוא הדבקה על השפה של טבעת מוביוס עם דיסק. כעת, לפי ון-קמפן, $U=$ טבעת מוביוס, $V=$ דיסק, $U\cap V=$ טבעת.

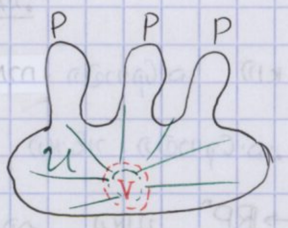
לכן $\pi_1(V)=\{1\}$, $\pi_1(U)=F_1$, $\pi_1(U\cap V)=F_1$. לכן

$$\pi_1(P)=\pi_1(\mathbb{RP}^2)\cong \langle x\mid\ \rangle \underset{\langle z\mid\ \rangle}{*} \{1\} \cong \langle x\mid x^2=1\rangle \cong \mathbb{Z}/_2$$

$x^2 \leftarrow z$

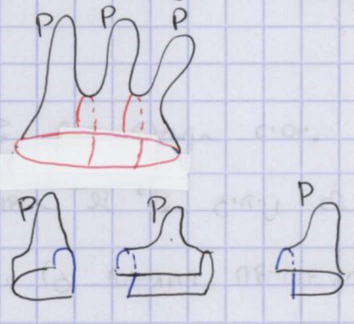
עתה נרצה לחשב את החבורה היסודית של הסכום הקשיר של P.

כלומר, $\pi_1(nP)$.

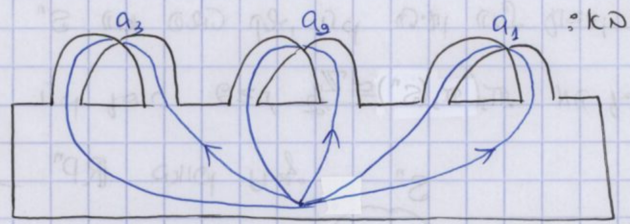


$$\pi_1(V)=1;\quad \pi_1(U\cap V)=F_1$$

שזה מגיע לצורה



הורדנו מ-P דיסק, ולכן קיבלנו טבעת מביוס. בסך הכל, זה שקול הומוטופית למשהו הבא:



הכיוון הוא נגד כיוון השעון. הלולאה של השפה היא מכפלת הריבועים, ולכן

$$\pi_1(nP)=\langle a_1,a_2,\dots,a_n \mid a_1^2\cdots a_n^2=1\rangle$$

עתה נסתכל על האבליניזציה.

$$Ab(\pi_1(nP))=\mathbb{Z}^n\Big/\left\langle\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

נסתכל על ההומומורפיזמים $\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathbb{Z}^m$. מספיק להגדיר אותם על איברי הבסיס הסטנדרטי $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$. לכן כל הומומורפיזם הוא מהצורה

$$m\left(\quad\overset{n}{}\quad\right)\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

עתה נסתכל על אוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}^n$. כל אוטומורפיזם כזה ניתן לתאר על ידי מטריצה A. כדי שזה יהיה הפיך יש מטריצה של שלמים B, שעבורה $A\cdot B=I$.

נוכיח: A מייצג אוטומורפיזם אם ורק אם $\det(A)=\pm1$.

$\Leftarrow$ נניח $A\cdot B=I$. אז $\underset{\mathbb{Z}}{\det(A)}\cdot\underset{\mathbb{Z}}{\det(B)}=1$, כדרוש.

$\Rightarrow$ נניח $\det(A)=\pm1$. אפשר להגדיר $adj(A)$, והיא תהיה מטריצה של איברים שלמים. אם נחלק אותה ב-$\det(A)$, היא ההופכית.

אפשר לבחור בסיס של $\mathbb{Z}^n$ כך ש-$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ יהיה בבסיס (על ידי $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ 1 & \ddots & \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$).

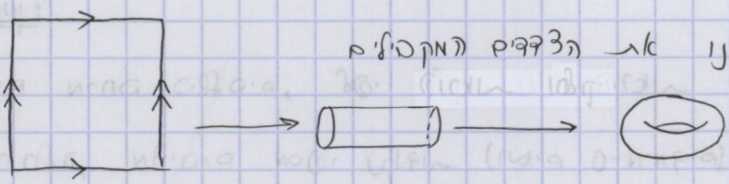
לכן

$$\mathbb{Z}^n\Big/\left\langle\begin{pmatrix}2\\\vdots\\2\end{pmatrix}\right\rangle\cong\mathbb{Z}^n\Big/\left\langle\begin{pmatrix}2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\rangle\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}^{n-1}.$$

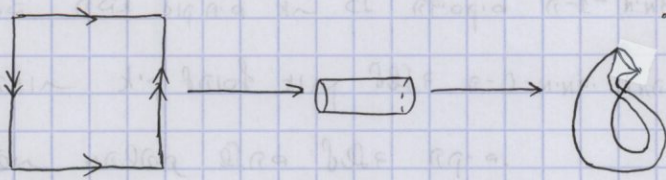
7.1.14

טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 11

דוגמה:



כדי להגיע לטורוס הדבקנו את הצדדים המקבילים של ריבוע.



כעת נגדיר את בקבוק קליין.

נסמן את בקבוק קליין K.

אזי K הוא הדבקה של שתי טבעות מביוס M לאורך השפה.

אבל אם מוציאים דיסק מהמישור הפרויקטיבי P, מקבלים טבעת מביוס M.

ז"א ש-K הוא הדבקה של שני מישורים פרויקטיביים כשמוציאים מכל אחד דיסק כדיסק שהוצאנו, ולכן $K=P\#P$.

אם כן, אנו יודעים כי $\pi_1(K)=\langle a_1,a_2 \mid a_1^2a_2^2\rangle$, $Ab(\pi_1(K))\cong \mathbb{Z}/_2\oplus\mathbb{Z}$.

תרגיל: (יהיה בשיעורים)

אם F מכיל טבעת מביוס (כתת-מרחב), אזי $F\#T\cong F\#K\cong F\#P\#P$.

מסקנה:

$$T\#T\#P\#P\#P\cong 7P$$

מרחבי CW (מרחבי תאים) CW complex

הרעיון:

בונים מרחב בשלבים, לפי חלקים ולפי הוראות נתונים.

בהתחלה, מציבים מספר נקודות (תאים 0-מימדיים).

בשלב הבא לוקחים את כל הדיסקים ה-1-מימדיים (קטעים), ונתונות הוראות איך להדביק אותן לשלב ה-0-מימדי (מה שהיה עד עכשיו); פונקציות רציפות מהשפות שלהם לשלב הקיים.

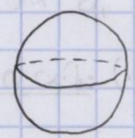
כך ממשיכים עם כל החלקים, כל פעם לפי המימד.

דוגמה:

נסמן ב-d_n את מספר הדיסקים ה-n-מימדיים.

אם $d_0=1$ ואם $d_1=1$, בהכרח נקבל קו שקצותיו מודבקים, כלומר את S^1.

אם נוסיף שני דיסקים 2-מימדיים ונדביק את השפה של כל אחד מהם ל-S^1 שקיבלנו, נקבל את D^2.



דוגמה:

נראה מבנה CW ל-D^7: $d_0=1$, $d_6=1$ ו-$d_7=1$.

אחרי שנדביק את השפה של D^6 לנקודה, השלב ה-6-מימדי יהיה S^6.

עכשיו צריך לתת העתקה רציפה מהשפה של D^7 לשלב ה-6-מימדי; אבל יש הומיאומורפיזם ביניהם, ונבחר אותו. נקבל את D^7.

הערה:

אפשר שיהיה מספר אינסופי של תאים בשקית או מספר אינסופי של שלבים.

לרוב נניח שזה לא המצב.

סימונים:

d_n = מספר הדיסקים (תאים) ה-n-מימדיים; K^n = השלב ה-n-מימדי.

הגדרה:

המימד של הקומפלקס הוא גודל הדיסק הגדול ביותר.

ננסה לחשב את החבורה היסודית לפי מבנה CW.

בשלב ה-0, $\pi_1(K_0,a)=\{1\}$.

אם השלב החד-מימדי אינו קשיר, גם השלבים הבאים בבנ"ה לא יהיו קשירים; לכן נניח שהוא קשיר.

<u>הערה:</u>

$\mathbb{R}^2\not\cong\mathbb{R}^n$ לכל $n\neq 2$.

<u>הוכחה:</u>

עבור $n=1$ ראינו כבר בטופולוגיה.

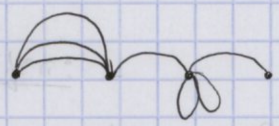
נניח $n>2$, ונניח בשלילה שקיים הומיאומורפיזם $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^n$.

על ידי צמצום התחום והטווח, $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}$ הומיאומורפיזם,

ובפרט שקילות הומוטופית.

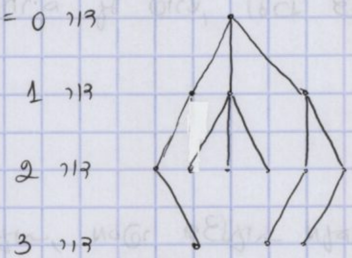
אבל $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\simeq S^1$ ו-$\mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}\simeq S^{n-1}$, אבל $S^1\not\simeq S^{n-1}$ לפי החבורות היסודיות, בסתירה.

נחזור למבנה CW.



קומפלקס חד-מימדי הוא, בעצם, גרף.

נגדיר: עץ:



עץ הוא כוויץ.

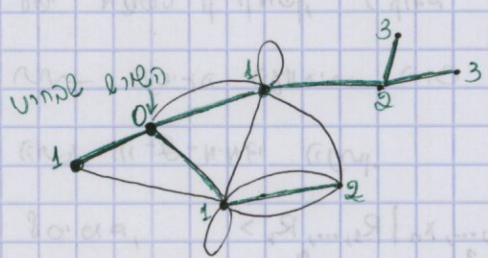
<u>משפט:</u>

אם G גרף קשיר כלשהו, אז הוא מכיל עץ המכיל את כל הקודקודים של G.

עץ כזה נקרא עץ פורש של G.

ניתן לבחור כרצוננו מיהו השורש.

<u>הוכחה:</u>



הערה:

בעץ עם n קודקודים יש n-1 צלעות (נובע מהבנייה).

משפט:

אם G גרף קשיר, אז $\pi_1(G)\cong F_m$, כאשר m הוא מספר הצלעות ב-G מעבר לעץ הפורש.

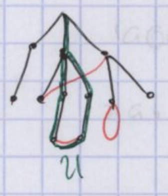
הוכחה:

באינדוקציה על m.

עבור m=0 זה ברור ($F_0=\{1\}$).

נניח כי הטענה נכונה עבור m-1. נבחר צלע שהוספנו, ונגדיר:

U = הצלע עם שני המסלולים בעץ הפורש לשורש. אזי $U\simeq S^1$, ולכן $\pi_1(U)=F_1$.



V = כל הגרף בלי הצלע שבחרנו. לפי הנחת האינדוקציה, $\pi_1(V)=F_{m-1}$.

$U\cap V$ הוא כוויץ (חלק מהעץ הפורש).

בסך הכל, $\pi_1(G)\cong F_1 \underset{\{1\}}{*} F_{m-1}\cong F_m$.

הערה:

לפי ההוכחה, היוצרים גם ידועים; בוחרים עץ פורש, ולכל צלע שהוספנו מייצרים לולאה בעץ הפורש עד לשורש.

מסקנה:

אם ב-G יש d_0 קודקודים ו-d_1 צלעות, מספר הצלעות מעבר לעץ הפורש הוא

$$d_1-(d_0-1)=d_1-d_0+1$$

עכשיו נשאל מה קורה אם הוספנו D^2 ע"י פונקציה רציפה.

V כוויץ, לכן $\pi_1(V)=\{1\}$. $\pi_1(U\cap V)\cong F_1$.

יש ל-U נסוג עוותי - מה שהיה קודם - ולכן $\pi_1(U)\cong\pi_1(\text{מה שהיה קודם})$

לפי משפט ון-קמפן, $\pi_1\cong 1 \underset{F_1}{*} \pi_1(\text{מה שהיה קודם})$.

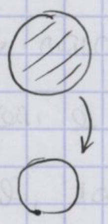
תחת הנסיגה העוותית, היוצר של $\pi_1(U\cap V)$ הולך להעתקת ההדבקה של התא ה-2-מימדי הנתון.

לסיכום, $\pi_1(K^2)=\langle x_1,\dots,x_n \mid R_1,\dots,R_k\rangle$

היוצרים של π_1 של השלד ה-1-מימדי

מילים ב-$x_1,\dots,x_n$ המייצגות את העתקות ההדבקה של התאים ה-2-מימדיים

דוגמה:



$d_0=1$, $d_1=1$, $d_2=1$.

השפה של D^2 מלופפת סביב המעגל שיש לנו m פעמים.

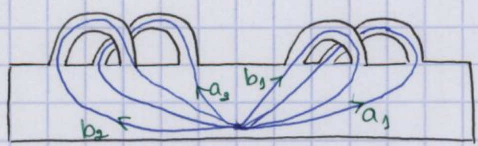
העץ הפורש של K^1 הוא הנקודה, והלולאה היא צלע מחוץ לעץ הפורש. לכן $\pi_1(K^1)\cong F_1$. לפי מה שהוכחנו,

$$\pi_1(K^2)=\langle x \mid x^m\rangle=\mathbb{Z}/m$$

אם נוסיף עוד תאים למרחב ממימד >2, החבורה היסודית נשמרת.

ההסבר הוא שלפי אותו טיעון כמו קודם, V עדיין כוויץ, אבל $V\cap U$ שקול הומוטופית ל-S^{n-1} ($n=$ מימד הדיסק), וזה לא ישנה את החבורה היסודית.

דוגמה:



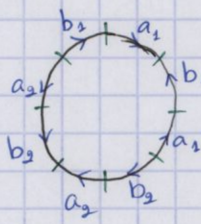
ניתן מבנה CW ל-$2T$.

אם מורידים דיסק מקבלים את

ואז אם נדביק חזרה D^2 לשפה נקבל את $2T$.

לתיק יש נסג עיוותי (בכחול), שהוא זר של ארבעה מעגלים.

לכן ניתן להדביק את הדיסק D^2 לזר הזה.

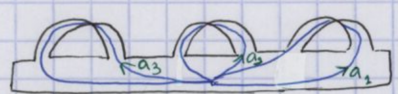


קיבלנו שמבנה CW הוא $d_0=1$, $d_1=2n$, $d_2=1$.

ההדבקה של השפה מתוארת בשרטוט משמאל.

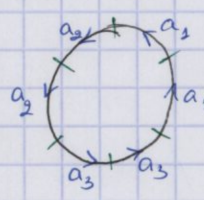
לפי השיטה לחישוב חבורה יסודית, העץ הפורש הוא הנקודה, ויש ארבע צלעות. לכן, $\pi_1(2T)=\langle a_1,b_1,a_2,b_2 \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\rangle$.

דוגמה:



מבנה CW של nP הוא $d_0=1$, $d_1=n$ ו-$d_2=1$,

עם ההדבקה משמאל.



נקבל אותה הצגה ל-$\pi_1(nP)$.

הערה:

כל חבורה בעולם ניתנת להצגה כחבורה יסודית של מרחב טופולוגי כלשהו!
אפילו של קומפלקס CW דו-מימדי.

למשל, אם החבורה היא $\langle x_1,\dots,x_n | R_1,\dots,R_m \rangle$, בונים זר של n מעגלים,
וכל יחס ממשים ע"י דיסק אחד.

מרחבי כיסוי (המשך)

תהי $p:E\longrightarrow B$ העתקת כיסוי.

בהינתן $b\in B$, יכולנו לבחור $e\in p^{-1}(b)$ (הסיב של b).

לכן מושרית העתקה $p_*:\pi_1(E,e)\longrightarrow\pi_1(B,b)$.

משפט:

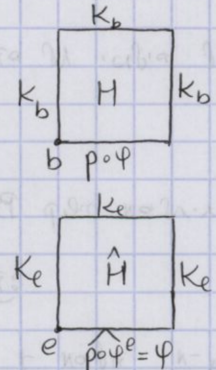
p_* מונומורפיזם (כלומר חד-חד ערכי).

הוכחה:

נראה ש- $\ker p_*=\{1\}$.

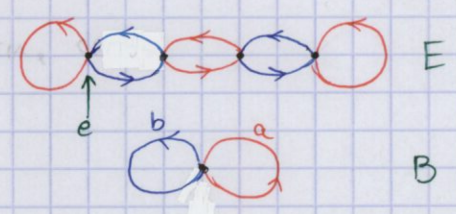
נניח $[\varphi]\in\pi_1(E,e)$, ונניח $p_*([\varphi])=1$. צ"ל $[\varphi]=1$.

$p_*([\varphi])=1$ פירושו $p\circ\varphi\simeq_{\partial I}K_b$, כלומר יש הומוטופיה



נרים את ההומוטופיה, כך שהפינה השמאלית התחתונה מועתק ל-e. לכן סיימנו.

דוגמה:

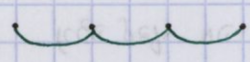


ההעתקה p מעתיקה כל קטע בצבע לקטע המתאים בצבע ב-B, בכיוון המצויר, ואת הנקודה השחורה לנקודה השחורה ב-B.

לפי מה שעשינו קודם, $\pi_1(B)=F_2$ ו- $\pi_1(E)=F_5$.

לכן p_* הוא שיכון של F_5 ב- F_2. נרצה למצוא אותו במפורש.

ע"פ פורש של E הוא, למשל,



לכן, אפשר למצוא במפורש את היוצרים:

$$a,\ b^2,\ ba^2b^{-1},\ bab^2a^{-1}b^{-1},\ babab^{-1}a^{-1}b^{-1}\in F_2$$

הגדרה:

אם $p_1:E_1\longrightarrow B$ ו- $p_2:E_2\longrightarrow B$ שני כיסויים של B, נאמר שהם איזומורפיים אם יש הומיאומורפיזם $h:E_1\longrightarrow E_2$ כך ש- $p_2\circ h=p_1$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

הגדרה:

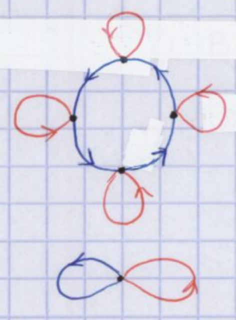
אם $p_1:(E_1,e_1)\longrightarrow(B,b)$ ו-$p_2:(E_2,e_2)\longrightarrow(B,b)$ כיסויים מנוקדים (כלומר $p_i(e_i)=b$),

נאמר שהם איזומורפיים כיסויים מנוקדים אם יש הומיאומורפיזם $h:(E_1,e_1)\longrightarrow(E_2,e_2)$

כך ש- $p_2\circ h=p_1$.

דוגמה:

לפנינו עוד מרחב כיסוי של זר שני מעגלים.



נסביר מדוע הם שונים; אינם איזומורפיים.

האוטומורפיזמים של הכיסוי הזה הם סיבובים ב-0°, ב-90°,

ב-180° וב-270°. לכן יש ארבעה.

האוטומורפיזמים של הכיסוי הקודם הם סיבובים ב-0° וב-180° $\Leftarrow$ יש שניים.

לכן הם לא יכולים להיות איזומורפיים.

משפט:

אם B קשיר מסילתית, אז לכל $b_1,b_2\in B$ מתקיים $|p^{-1}(b_1)|=|p^{-1}(b_2)|$.

הוכחה:

תהי γ מסילה מ-b_1 ל-b_2 ב-B. נגדיר העתקה $F:p^{-1}(b_1)\longrightarrow p^{-1}(b_2)$ ע"י $F(x):=\hat{\gamma}^x(1)$.

נגדיר $G:p^{-1}(b_2)\longrightarrow p^{-1}(b_1)$ ע"י $G(x):=\hat{\bar{\gamma}}^x(1)$.

מתקיים $G\circ F=Id_{p^{-1}(b_1)}$ ו-$F\circ G=Id_{p^{-1}(b_2)}$, ולכן הן הפיכות, כנדרש.

הגדרה:

העוצמה של סיב נקראת הסדר של הכיסוי.

דיון:

נניח ש-B,E קשירים מסילתית. עבור $e\in p^{-1}(b)$ נסמן $\pi_1(B,b)\supseteq G_e:=p_*(\pi_1(E,e))$.

בהינתן $e_1,e_2\in p^{-1}(b)$, נרצה לבדוק מה הקשר בין G_{e_1} ל-G_{e_2}.

אם γ מסלה מ-e_1 ל-e_2, ניתן לחשוב על איברי $\pi_1(E,e_2)$ כעל לולאות מהצורה $\bar{\gamma}*\varphi*\gamma$. לכן,

לכל $[\varphi]\in\pi_1(E,e_1)$, $G_{e_2}=p_*(\pi_1(E,e_2))=\{(p\circ\bar{\gamma})*(p\circ\varphi)*(p\circ\gamma)\}=\overline{(p\circ\gamma)}\,G_{e_1}(p\circ\gamma)$

משפט:

G_{e_1} ו- G_{e_2} צמודות זו לזו. בפירוש, $G_{e_2}=(p\circ\gamma)^{-1}G_{e_1}(p\circ\gamma)$.

מסקנה:

כל מחלקת הצמידות של G_{e_1} מתקבלת ע"י החבורות G_e עבור e-ים שונים באותו סיב.

הוכחה:

יהי $g\in\pi_1(B,b)$ רוצים למצוא מסילה γ ב-E כך ש-$p\circ\gamma=g$, ואז המסילה γ מתאים (לפי המשפט הקודם). אבל γ היא בדיוק ההרמה של g, ואנו יודעים שק"מת יחידה כזו (המתחילה ב-e_1). הסוף של γ יהיה ה-e הדרוש.

מסקנה:

$G_e=G_{e'}$ לכל $e,e'\in p^{-1}(b)$ אם ורק אם G_e נורמלית ב-$\pi_1(B,b)$.

משפט:

יהי $p:E\longrightarrow B$ כיסוי, $e\in p^{-1}(b)$ ו- $[\varphi]\in\pi_1(B,b)$.
אזי $\hat{\varphi}^e$ מסילה סגורה אם ורק אם $[\varphi]\in G_e$.

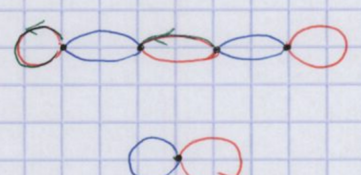
הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\hat{\varphi}^e$ סגורה; לכן $[\hat{\varphi}^e]\in\pi_1(E,e)$. לכן $p_*([\hat{\varphi}^e])=[p\circ\hat{\varphi}^e]=[\varphi]\in G_e$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $[\varphi]=p_*([\psi])$, כלומר $p\circ\psi\underset{\partial I}{\simeq}\varphi$. לכן

$$\hat{\varphi}^e(1)=\widehat{p\circ\psi}^e(1)=\psi(1)=e$$

דוגמה:



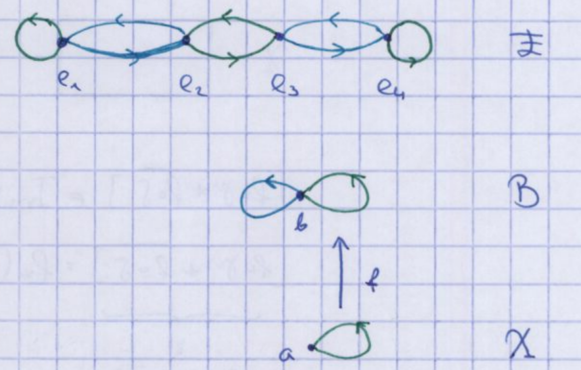
למסילה האדומה ב-B יש שתי הרמות (בירוק).
לכן רואים שהחבורות היסודיות בנקודות ההתחלה של ההרמות שונות (כי תמונתן שונה).

21.01.15 הרצאה 13

$$\begin{array}{ccc} & & (E,e) \\ & \overset{\hat f}{\nearrow} & \Big\downarrow p \\ (X,a) & \xrightarrow{f} & (B,b) \end{array}$$

נתעניין: בהינתן E כיסוי של B, $f:(X,a)\longrightarrow(B,b)$. עבור אילו נקודות $e\in p^{-1}(b)$ יש ל-f הרמה ל-$\hat f$,

$\hat f:(X,a)\longrightarrow(E,e)$.



פה למשל, יש הרמה מ-e ל-f רק עבור e_1 ו-e_4.

משפט: נניח ש-X,E,B הם קשירים מסילתית וקשירים(*) מסילתית מקומית.

יהי $p:E\longrightarrow B$ כיסוי. תהי $f:X\longrightarrow B$, $b\in B$, $a\in X$ ו- $f(a)=b$ ותהי $e\in p^{-1}(b)$.

אזי קיימת העתקה $\hat f: X\longrightarrow E$ המקיימת $\hat f(a)=e$ ו- $p\circ\hat f=f$ $\Leftrightarrow$ $f_*(\pi_1(X,a))\subseteq p_*(\pi_1(E,e))$

ובמקרה זה $\hat f$ יחידה!

(*) מרחב X נקרא קשיר מסילתית מקומית אם לכל $x\in X$ ולכל סביבה U של x קיימת סביבה $U\supseteq V$, $x\in V$

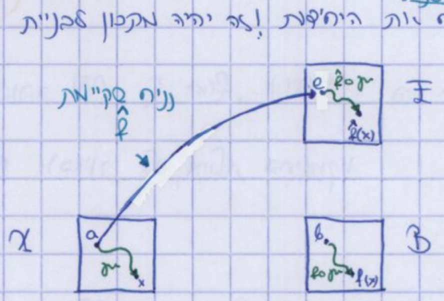
כך ש-V קשיר מסילתית.

(למעשה, מספיק להניח שלכל שתי נקודות $p,q\in V$ יש מסילה ב-U שמחברת אותן).

נשים לב שקשיר מסילתית $\not\Rightarrow$ קשיר מסילתית מקומית (כי במקומיות דורשים שהמסילה תהיה בתוך V או U)).

הוכחה: כיוון קל: נניח שיש $\hat f$ כנ"ל. כלומר $\begin{cases} f=p\circ\hat f \\ \hat f(a)=e\end{cases}$ מכאן $f_*=p_*\circ\hat f_*$ מכאן ש-$Im(f_*)\subseteq Im(p_*)$ ← תמונה של f_*

כיוון שני:
נוכיח את היחידות וזה יהיה מתכון לבניית הקיום.



הסימון מסמן את המסילה שמתחילה ב-e.

אז בהכרח: (1) $\hat f(x)=\widehat{f\circ\gamma}^{e}$

הראנו שאם יש $\hat f$, היא יחידה. נבנה $\hat f$.

בהינתן $x\in X$, הנחנו ש-X קשיר מסילתית. נבחר מסילה γ מ-a ל-x ונגדיר: (1) $\hat f(x):=\widehat{f\circ\gamma}^{e}$.

צ"ל: (1) $\hat f(x)$ לא תלוי בבחירת γ.

(2) $\hat f$ רציפה.

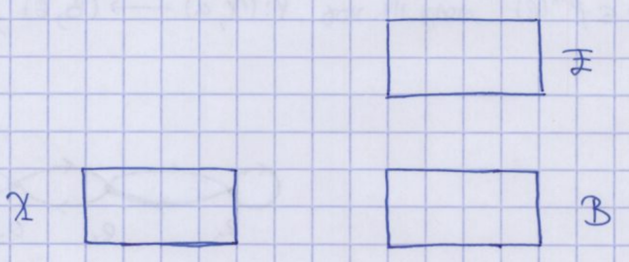
21.01.15

!מן הבניה ברור ש- $p\circ\hat{f} = f$, $\hat{f}(a)=e$.

$\underline{1}$: נניח δ עוד מסילה מ-a ל-x. צ"ל: $\widehat{f\circ\gamma}^{e}(1) = \widehat{f\circ\delta}^{e}(1)$ ⊛

⊛ מתקיים $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\widetilde{f\circ\gamma * \overline{f\circ\delta}}^{e}(1) = e}$ (**)

במילים: המסילה שנוצרת מ-$f\circ\gamma$ ואז $f\circ\delta$ הפוך היא מסילה סגורה.



! (**) מתקיים $\Longleftrightarrow$ $[f\circ\gamma * \overline{f\circ\delta}] \in \operatorname{Im} p_*$

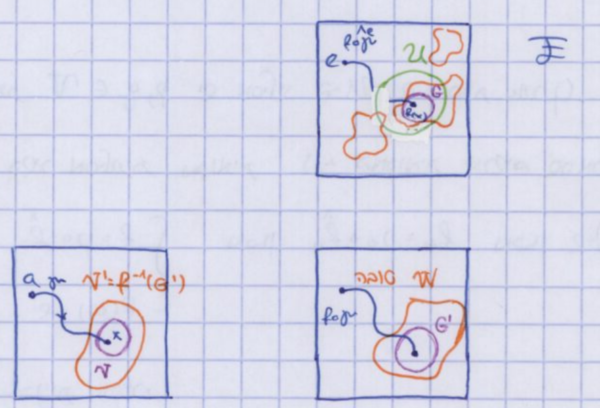
$\underbrace{[f\circ\gamma * \overline{f\circ\delta}]}_{=\, f\circ(\gamma * \bar{\delta})} = f_*([\gamma * \bar{\delta}])$

! הנחנו $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Im} p_*$, לכן מתקיים (**) ! לכן $\hat{f}$ מוגדר היטב.

{ f הומומורפיזם של חבורות: $(f\circ\gamma_1)*(f\circ\gamma_2) = f\circ(\gamma_1*\gamma_2)$ }

$\underline{2}$: צ"ל ש-$\hat{f}$ רציפה. תהי $x\in X$, נניח רציפות ב-x.

תהי U סביבה של $\hat{f}(x)$. נמצא סביבה V של x המקיימת $\hat{f}(V)\subseteq U$.



בהינתן U סביבה של $\hat{f}(x)$, נסתכל על סביבה טובה W של $f(x)$. $p^{-1}(W)$ הוא איחוד זר של קבוצות פתוחות ב-E. נחתוך: $U\cap p^{-1}(W)$ וזו G (בציור, G מוכלת בחיתוך).

עכשיו: $G' := p(G) \subseteq B$.

מרציפות f ! קשירות מסילתית מקומית של X, יש V קשיר מסילתית סביבה של x כך ש- $f(V)\subseteq G'$

(ניקח $V' = f^{-1}(G')$! ואז $V\subseteq V'$).

G' מקיימת שהתמונה ההפוכה שלה תחת p היא איחוד זר של קבוצות פתוחות כמו בהגדרה מתאים לסו-

הקבוצה הפתוחה מבניהן שמכילה את $\hat{f}(x)$ מוכלת ב-U.

21.01.15

נראה ש- $\hat f^{-1}(V) \in G$:

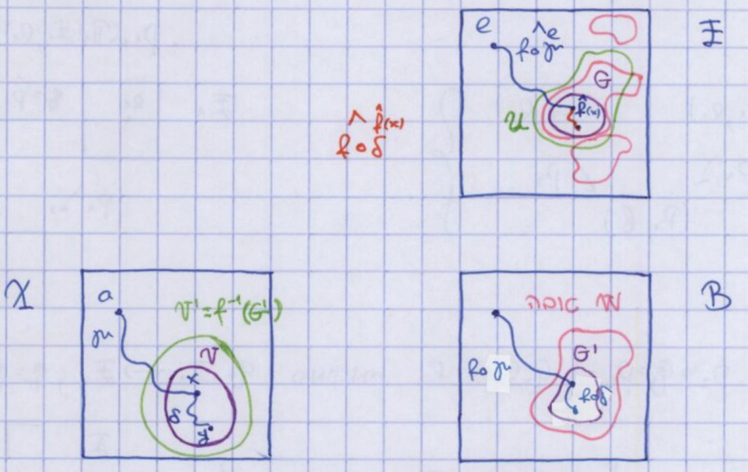
ניקח $y \in V$! נראה ש- $\hat f(y) \in G$:

V קשיר מסילתית (רק בהרצאה) ! לכן יש מסילה δ מ- x ל- y. המסילה ב- V אבל מספיק גם ב- V').

ניקח מסילה מ- a ל- y : $\delta * \gamma$.

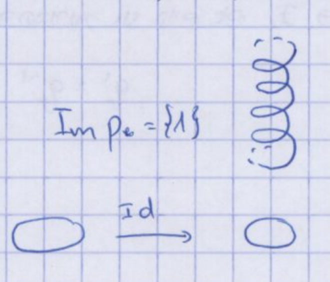
$f \circ \delta$ מוכלת ב- G' ! אז $\widehat{f\circ\delta}^{\hat e(x)} \subseteq G$.

ניתן לומר גם כן : $\hat f|_V = (p|_{G'})^{-1} \circ (f|_V)$



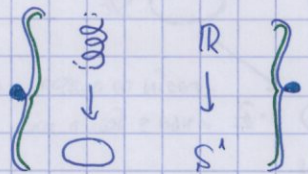
מסקנה מהמשפט: אם X פשוט-קשר וקשיר מסילתית מקומית אז לכל כיסוי $p: E \to B$ ולכל העתקה $f: X \to B$ ולכל בחירה $e \in p^{-1}(f(a))$, קיימת הרמה $\hat f$ כך ש- $\hat f(a) = e$.

דוגמה (נגדית):



$\mathrm{Im}(Id_*) = \pi_1(S^1)$; $\mathrm{Im}(Id_*) \not\subseteq \mathrm{Im}\, p_*$! לכן אין הרמה.

טענה: כל העתקה $f: P \to S^1$ היא נול-הומוטופית (P - המישור הפרוייקטיבי).



הוכחה: נביט בכיסוי:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "q"] \\ P \arrow[ur, "\hat f"] \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}/2$ $\mathbb{Z}$

טענה: יש הרמה ל- f

ההומומורפיזם היחיד מ- $\mathbb{Z}/2$ ל- $\mathbb{Z}$ הינו הומומורפיזם ה-0, לכן מוכל בתמונת q_*.

(היוצר ב- $\mathbb{Z}/2$ צריך לעבור לאיבר מסדר 2 ! אין כזה ב- $\mathbb{Z}$).

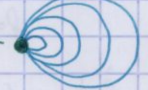
$f = q \circ \hat f$. כיוון ש- $\mathbb{R}$ כוויץ, $\hat f$ נול-הומוטופית, לכן $q \circ \hat f$ נול-הומוטופית.

(אפשר גם: $\mathbb{R}$ כוויץ $\Leftarrow$ q נול-הומוטופית $\Leftarrow$ $q \circ \hat f$ נול-הומוטופית)

21.01.12

שים לב: S^2 ○ $\xrightarrow{Id}$ ○ S^2: העתקת הזהות $S^2 \to S^2$ משרה Id_* בין חבורות יסודיות טריוויאליות $\{1\} \xrightarrow{Id_*} \{1\}$. למרות זאת, היא אינה נול-הומוטופית (כי S^2 לא כוויץ - כפי הוכחנו זאת).

ועתה, B המרחבים קשירים מסילתית, קשירים מסילתית מקומית, פשוטי-קשר מקומית (התנאי ההכרחי שהופיע בתנאי) לקיומו של מרחב כיסוי פשוט-קשר).

דוגמה למרחב שאינו פשוט קשר:  לנקודה זו אין סביבה שבה B העתקה מ-S^1 היא נול-הומוטופית. (במרחב כולו).

משפט: נניח $p_1:(E_1,e_1)\to(B,b)$, $p_2:(E_2,e_2)\to(B,b)$ שני כיסויים ונניח:

$p_{1*}(\pi_1(E_1,e_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(E_2,e_2))$.

$$\left\{\begin{tikzcd}(E_1,e_1) \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b) & \end{tikzcd}\right\}$$

$$\begin{tikzcd}E_1 \ni e_1 \arrow[rr, "q=\hat{p}_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & e_2 \in E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B \ni b & \end{tikzcd}$$

אזי מהמשפט קודם $q=\hat{p}_1$, $q:E_1\to E_2$ המקיימת $q(e_1)=e_2$ ו- $p_2\circ q=p_1$.

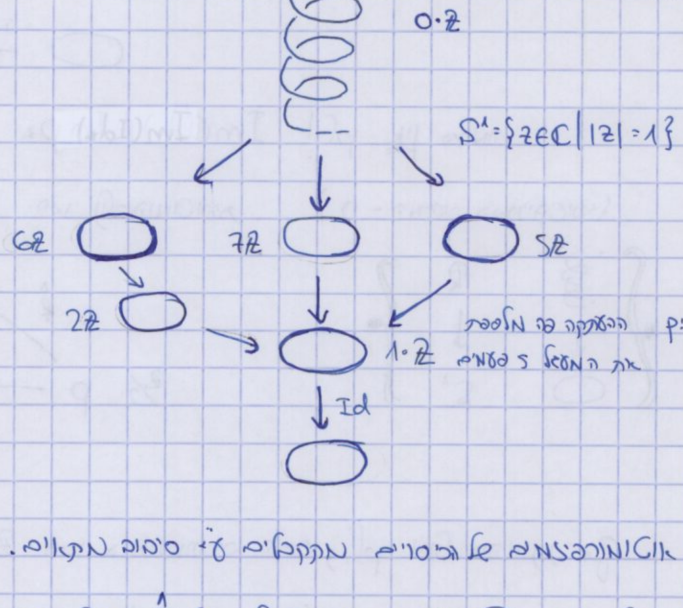
$$\begin{tikzcd}E_1 \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "q"] & \\ B & E_2 \arrow[l, "p_2"]\end{tikzcd}$$

{במקרה כזה, E_1 כיסוי של E_2 ו- q העתקת כיסוי}
הטענה הבאה.

טענת המשפט היא: q היא העתקת כיסוי. ואם $Im\,p_{1*}=Im\,p_{2*}$ אז q היא איזומורפיזם של כיסויים.

הוכחה: ש-q איזומורפיזם: אם יש שוויון בין החבורות אז קיים גם $q':E_2\to E_1$ ומכיוון שההרמה יחידה, $q\circ q'=Id_{E_2}$, $q'\circ q=Id_{E_1}$, כלומר: $q'=q^{-1}$.

דוגמה:



אוטומורפיזמים של הכיסויים מתקבלים ע"י סיבוב מתאים.

למשל, את ○ $7\mathbb{Z}$ סיבוב בזווית של $\frac{1}{7}$ מעגל הוא אוטומורפיזם. בפרט, חבורת האוטומורפיזמים היא טרנזיטיבית על הסיב. (כל נקודה בסיב עוברת לכל נקודה אחרת בסיב).

[חבורת האוטומורפיזמים של ○ $7\mathbb{Z}$, למשל, היא $\mathbb{Z}/7$].

28.1.15 טופולוגיה אלגברית 1 - הרצאה 14

משפט:
יהי $p:(E,e)\longrightarrow(B,b)$ כיסוי. לכל $u\in p^{-1}(b)$ נסמן
$$G_u=p_*(\pi_1(E,u))\subseteq\pi_1(B,b)$$
יש אוטומורפיזם $h:E\longrightarrow E$ כך ש- $h(e)=u$ $\iff$ $G_e=G_u$.

הוכחה:
אנו יודעים כי $\pi_1(E,u)=\{\bar{\gamma}*\varphi*\gamma \mid \varphi\in\pi_1(B,b)\}$, ונסמן $g=p\circ\gamma\in\pi_1(B,b)$. אזי
$$G_u=g^{-1}G_e g$$

הגדרה:
תהי חבורה K ותהי תת-חבורה $H\subseteq K$. אזי $N_K(H):=\{g\in K \mid g^{-1}Hg=H\}$ הוא המנרמל.

הערה:
זוהי תת-החבורה המקסימלית X המכילה את H כך ש-H נורמלית ב-K.

המשך ההוכחה:
נובע מהדיון הנ"ל ש- $[\varphi]\in N_{\pi_1(B,b)}(G_e)$ אם ורק אם יש אוטומורפיזם יחיד h של E כך שמתקיים $h(e)=\hat{\varphi}^e(1)$.

קיבלנו העתקה $F:N_{\pi_1(B,b)}(G_e)\longrightarrow Aut(E)$.
אנו יודעים כבר ש-F מוגדרת היטב ועל (כי ניקח γ ב-E מ-e ל-$h(e)$ וניקח $\varphi=p\circ\gamma$). כמו כן, $F^{-1}(1)=G_e$.
נראה ש-F הומומורפיזם. יהיו $\varphi,\psi\in N_{\pi_1(B,b)}(G_e)$. מספיק להראות
$$F(\varphi\psi)(e)=(F(\varphi)\circ F(\psi))(e)$$
$$F(\varphi)(\hat{\psi}^e(1))\underset{\text{לפי משפט ההרמה}}{=}\hat{\psi}^{\hat{\varphi}^e(1)}(1) \qquad \hat{\psi}^{\hat{\varphi}^e(1)}(1)=\widehat{\varphi*\psi}^e(1)$$
והם שווים, כדרוש.

לסיכום, F משרה איזומורפיזם $N_{\pi_1(B,b)}(p_*(\pi_1(E,e)))/p_*(\pi_1(E,e))\cong Aut(E)$.

בעצם, קיבלנו פעולה של המנרמל הנ"ל על E, וזו פעולה שמאלית.

עתה נראה פעולה ימנית של $\pi_1(B,b)$ על הסיב $p^{-1}(b)$.

עבור $x\in p^{-1}(b)$ ועבור $[\varphi]\in\pi_1(B,b)$ נגדיר $x[\varphi]:=\hat{\varphi}^x(1)$.

נבדוק שאכן $x[\varphi\psi]=(x[\varphi])[\psi]$.

$$x[\varphi\psi]=\widehat{\varphi*\psi}^x(1)=\hat{\psi}^{\hat{\varphi}^x(1)}(1)=(x[\varphi])[\psi]$$

תזכורת:

אם G פועלת על X מימין אז יש התאמה טבעית

$$Orb(x)\longleftrightarrow {}^{G}\!/_{Stab(x)}$$

$$xg\longleftrightarrow Stab(x)\cdot g$$

כאשר, $Orb(x)=\{xg\,|\,g\in G\}$ ו- $Stab(x)=\{g\in G\,|\,xg=x\}$.

ניקח $x=e$, $X=p^{-1}(b)$ וכן $G=\pi_1(B,b)$.

$Orb(e)=p^{-1}(b)$, ולכן הפעולה טרנזיטיבית. כמו כן, $Stab(e)=p_*(\pi_1(E,e))$. לכן,

יש התאמה חד-חד ערכית ועל

$$p^{-1}(b)\longleftrightarrow {}^{\pi_1(B,b)}\!/_{p_*(\pi_1(E,e))}$$

בפרט, $[\pi_1(B,b):p_*(\pi_1(E,e))]=|p^{-1}(b)|=$ סדר הכיסוי.

סיכום:

יש התאמה בין מרחבי הכיסוי לבין תת-החבורות של החבורה היסודית $\pi_1(B,b)$.

הכיסוי המתאים לתת-החבורה הטריויאלית הוא הכיסוי האוניברסלי, $(\tilde{B},e)$.

לכל תת-חבורה יש כיסוי המתאים לה, ואם יש שני כיסויים המתאימים לאותה חבורה הם איזומורפיים.

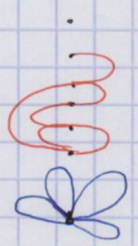
(כל זה בהנחה ש- (B,b) קשיר מסילתית, קשיר מסילתית מקומית ופשוט קשר מקומית).

תת-החבורה היא נורמלית $\Leftrightarrow$ מרחב הכיסוי הוא רגולרי, כלומר אפשר להגיע מכל נקודה לכל נקודה על ידי אוטומורפיזמים.

משפט:

אם $H \subseteq F_n$ תת-חבורה, אז H חופשית (גם מאינדקס אינסופי).

אם $[F_n:H]=\underset{\text{סופי}}{k}$, אז: $H \cong F_{kn-k+1}$.



הוכחה:

נבחר ב- $(B,b)=\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ פעמים}}$ אז: $\pi_1(X)=F_n$.

מהמשפט שלא הוכחנו, יש ל-B מרחב כיסוי E שעבורו $p_*(\pi_1(E,e))=H$.

מהציור אנו רואים שמרחב כיסוי של גרף הוא גרף (אולי אינסופי).

סדר הכיסוי הוא האינדקס של תת-החבורה.

אם $[F_n:H]=k$ סופי, אז הכיסוי E הוא מסדר k, ולכן יש בו k קודקודים ו- kn צלעות. לכן $H=\pi_1(E)=F_{kn-k+1}$.

הערה:

$$\underbrace{(1-m)}_{\text{מאפייני אוילר}}=k\underbrace{(1-n)} \iff m-1=k(n-1) \iff H=F_m$$