

פתרון תרגיל בית 7 מרחבים ויקטורים

שאלה 1

א.אם קבוצה של שלושה וקטורים ב  $R^3$  בת"ל אזי היא מהווה בסיס של  $R^3$ . לכן נבדוק האם היא בת"ל:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 2R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow 4R_3 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & 29 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + 5R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 52 & 0 \end{array} \right)$$

לכן קבוצה בת"ל ומהווה בסיס של  $R^3$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ ב.}$$

לכן קבוצה ת"ל ואינה מהווה בסיס של  $R^3$ .

ג. בקבוצה 2 וקטורים לכן קבוצה אינה מהווה בסיס של  $R^3$ .

ד. בקבוצה 4 וקטורים לכן קבוצה ת"ל ואינה מהווה בסיס של  $R^3$ .

פתרון שאלה 2

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$x_4 = a, x_5 = b, \Rightarrow 2x_3 - 6a - 3b = 0 \Rightarrow x_3 = 3a + 1.5b \Rightarrow$$

$$3x_2 - (3a + 1.5b) + 6b = 0 \Rightarrow x_2 = a - 1.5b \Rightarrow$$

$$x_1 - 2(a - 1.5b) - b = 0 \Rightarrow x_1 = 2a - 2b \Rightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2a - 2b, a - 1.5b, 3a + 1.5b, a, b) =$$

$$a(2, 1, 3, 1, 0) + b(-2, -1.5, 1.5, 0, 1)$$

$$B = \{(2, 1, 3, 1, 0), (-2, -1.5, 1.5, 0, 1)\} \text{ מימד } 2, \text{ בסיס למשל קבוצה}$$

פתרון שאלה 3

פתרון

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & -1 & 6 & z - 2x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - 2x + y \end{array} \right)$$

וקטורים לא מהבים בסיס של  $R^3$  כי הם ת"ל, מימד של  $U$  שווה ל-2 והבסיס למשל קבוצה  $B = \{(1,0,2), (1,1,1)\}$  ומשוואות  $-2x + y + z = 0$

$U \cap W$  מהווה תת-מרחב של  $R^3$  המורכב מפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$z = t, y = \frac{1}{3}t, x = z - y = \frac{2}{3}t \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, t \right) = t \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right)$$

לכן מימד של  $U \cap W$  שווה לאחד ובסיס לדוגמא הוקטור  $\left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right)$

פתרון שאלה 4

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\dim W = 5 - 3 = 2$$

פתרון שאלה 5

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 4 & -5 & b \\ -1 & -2 & 2 & 1 & c \\ 1 & 3 & 1 & 0 & d \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 3R_2}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3d-5a+b \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow 3R_4 - 2R_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17a+3b-3c+9d \end{array} \right)$$

לכן משוואה של  $W$  היא

$$-17a + 3b - 3c + 9d = 0$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ -5 & 3 & 4 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 2 & 7 & 4 & d \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 1 & 3 & 3 & c+2a \\ 0 & 3 & 9 & 5 & d+a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2}}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b+2c \\ 0 & 0 & 0 & -4 & d-5a-3c \end{array} \right)$$

היא  $U$  לכן משוואה של

$$-a + b + 2c = 0$$

בשביל לחשב מימד של חיתוך צריך למצוא דרגות החופש של מערכת משוואות

$$\begin{cases} -17a + 3b - 3c + 9d = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

למערכת  $2=4-2$  דרגות החופש לכן

$$\dim W \cap U = 2$$