פתרון תרגיל 5 חדוא 2

שאלה 1:

תזכורת: $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{dt}\right)' = f\left(h(x)\right)h'(x) - f\left(g(x)\right)g'(x)$

א. ראשית, נשים לב כי $\lim_{x\to 0} x\cot(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\cos(x) = 1$ ולכן מדובר באינטגרל אמיתי במונה. כעת:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \left(t\cot(t)-1\right)dt}{x^3} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{x\cot(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{3x^2\sin(x)} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{6x\sin(x)+3x^2\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6\sin(x)+3x\cos(x)} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6\cos(x)+3\cos(x)-3x\sin(x)} = -\frac{1}{9}$$

ב. נשים לב כי $1 \le \sqrt{1+t^4}$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt \ge \lim_{x\to\infty}\int_0^x 1dt = \lim_{x\to\infty} x = \infty$. ולכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

ג.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\arcsin(2t)-2\arcsin(t)\right)dt}{x^8} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\arcsin(2x^2)-2\arcsin(x^2)\right)2x}{8x^7} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x^2)-2\arcsin(x^2)}{4x^6} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)}{24x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{6x^4} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}$$

כעת $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}=1$ ולכן

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x^4\right)-\left(1-4x^4\right)}{6x^4\left(\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-4x^4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-4x^4}\right)}=\frac{1}{4}$$

ד.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{3x^5}\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)dt}{x^{81}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{15x^4e^{-\frac{1}{3x^5}}}{81x^{80}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{15e^{-\frac{1}{3x^5}}}{81x^{76}}\overset{t=\frac{1}{x^5}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{15}{81}\frac{e^{-\frac{1}{3}t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{76}{5}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{15}{81}\left(\frac{t}{e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}\right)^{\frac{76}{5}}=0$$

שימו לב שהמעבר האחרון נכון בגלל ש

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{5}{3\cdot 76}e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}=\frac{1}{\infty}=0$$

שאלה 2:

בכל השאלות הסימן ~ יסמן ששני אינטגרלים הם חברים. נוכיח את החברות באמצעות מבחן ההשוואה הגבולי.

נזכור כי $\int\limits_{x_0} \frac{1}{\left(x-x_0\right)^{\alpha}}dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$

והאינטגרל $\int^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$

א.

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x}-1}dx = \int_1^2 \frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}dx \sim \int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$$

לכן האינטגרל המקורי מתבדר.

חישוב מבחן ההשוואה הגבולי: $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = 2$

ב. $\int_1^{\infty} \frac{\ln^5(x)}{x^2}dx$

נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.5}}dx$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln^5(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^5(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{2/5}}\right)^5 \underset{L'Hopital}{=} 0$$

כיוון שהאינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.5}}dx$ מתכנס, כך גם האינטגרל הקטן יותר במונה, כלומר האינטגרל המקורי מתכנס.

ג. $\int_0^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to0^+}\int_t^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to0^+}\left(x\ln(x)-x\right)_t^1=\lim_{t\to0^+}\left(-1-t\ln(t)+t\right)=-1$

כלומר האינטגרל מתכנס, ואפילו חישבנו את סכומו.

ד. $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2}dx\sim\int_0^1\frac{1}{x}dx$ ולכן האינטגרל המקורי גם מתבדר.

חישוב מבחן ההשוואה הגבולי: $\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$

ה. $\int_1^\infty e^{-\arctan(x)}dx\sim\int_1^\infty 1dx$

כיוון ש $\int_1^\infty 1dx$ מתבדר, כך גם האינטגרל המקורי.

חישוב מבחן ההשוואה הגבולי: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\arctan(x)}}{1}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

(למעשה, האינטגרל על כל פונקציה שיש לה גבול שונה מאפס מתבדר. שימו לב שאם לפונקציה אין כלל גבול ייתכן שהאינטגרל מתכנס.)

ו. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x+5}{\sqrt{x^6+2+\sin(x)}}dx=\int_{-\infty}^0 \frac{x+5}{\sqrt{x^6+2+\sin(x)}}dx+\int_0^\infty \frac{x+5}{\sqrt{x^6+2+\sin(x)}}dx$

שני האינטגרלים חברים של האינטגרלים המתכנסים $\int_{-\infty}^0\frac{-1}{x^2}dx,\int_0^\infty\frac{1}{x^2}dx$ ולכן מתכנסים.

חישוב מבחן ההשוואה הגבולי: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+5}{\sqrt{x^6+2+\sin(x)}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{\sin(x)}{x^3}}}=1$

ז. $\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\left\{\begin{matrix}e^x=t\\e^xdx=dt\end{matrix}\right\}=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt=\int_1^e\frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}dt$

לכן האינטגרל מתכנס.

ח. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}dx + \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}dx$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}dx$ אמיתי כיוון ש $\beta > 0$ ולכן מתכנס.

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}dx \sim \int_0^\infty \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}dx$$

ולכן מתכנס אם ורק אם $\beta - \alpha > 1$

חישוב מבחן ההשוואה הגבולי: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{x^\beta+1}}{\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^\beta}} = 1$

ט. $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$

כיוון שהפונקציה $\frac{1}{x^\alpha}$ שואפת מונוטונית לאפס (נתון $\alpha > 0$), והקדומה של $\cos(x)$ חסומה, לפי **<u>מבחן דיריכלה</u>** האינטגרל מתכנס.

י. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$

כיוון ש $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ הוא אמיתי ולכן מתכנס.

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה, בדומה לתרגיל לעיל.

יא.

$$\int_1^\infty \sin(x^2)dx = \left\{ \begin{aligned} & x^2 = t \\ & x = \sqrt{t} \\ & dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{aligned} \right\} = \int_1^\infty \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}dt$$

ואינטגרל זה מתכנס לפי מבחן דיריכלה.