אלגברה לינארית 2 (88113) – מבחן לדוגמה

פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

.1

א. הגדירו: הצגה של העתקה לינארית ביחס לזוג בסיסים.

ב. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המיוצגת, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^3$ ושל $\mathbb{R}^2$, על ידי המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

מצאו את $\ker T$ ואת $\operatorname{im} T$.

ג. האם קיימים בסיסים של $\mathbb{R}^3$ ושל $\mathbb{R}^2$ שביחס אליהם T מהסעיף הקודם מיוצגת על ידי המטריצה $B=\begin{pmatrix}7&8&9\\0&0&0\end{pmatrix}$? נמקו.

.2

א. הגדירו: ערך עצמי, וקטור עצמי (של מטריצה).

ב. נסמן ב- $\sigma(A)$ את הספקטרום (קבוצת הערכים העצמיים) של מטריצה ריבועית A. הוכיחו, לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. התייחסו במפורש למקרה של ערך עצמי 0.

ג. תנו דוגמה של מטריצות A,B כך ש- $AB=0$ אבל $BA\neq 0$. הסבירו מדוע דוגמה זו אינה סותרת את הטענה בסעיף הקודם.

.3

א. הגדירו: קבוצה אורתונורמלית, תת-מרחב ניצב.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי $\{e_1,e_2,e_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ (עם המכפלה הסקלרית הרגילה) כך ש-:

$$\operatorname{span}\{e_1\}=\operatorname{span}\{(1,0,1)\},\quad \operatorname{span}\{e_1,e_2\}=\left(\operatorname{span}\{(1,1,-1)\}\right)^{\perp}$$

.4 תהי $q(x,y)=x^2-6xy+9y^2$ תבנית ריבועית מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו עבור $q(x,y)$ מטריצה מייצגת סימטרית A.

ב. מצאו מטריצה אלכסונית הדומה אורתוגונלית ל- A.

ג. תארו במילים את אוסף הפתרונות של המשוואה $q(x,y)=5$ (למשל: אליפסה, פרבולה, זוג ישרים נחתכים וכו'). נמקו.

.5

א. הגדירו: אופרטור הרמיטי, אנטי-הרמיטי, אוניטרי.

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, $T:V\to V$ אופרטור אנטי-הרמיטי.
הוכיחו: כל ערך עצמי של T הוא מדומה טהור.

ג. עבור T כמו בסעיף הקודם נגדיר: $S=(I-T)^{-1}(I+T)$. הוכיחו: S אופרטור אוניטרי.