# סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** נתבונן בחבורה $\mathbb{Z}_{24}$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_{24}/ < 6 > \cong \mathbb{Z}_6$ (אין צורך להוכיח את השיוויון, רק את האיזומורפיות, אך אם השיוויון לא ברור לכם, מומלץ להוכיח גם אותו לעצמכם).

ב. למי איזומורפית $(\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})/(3\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})$?

פתרון.

א. נגדיר $f : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_6$ לפי $f([a]) = a \bmod 6$.
$f$ מוגדרת היטב כי אם $a \equiv b \pmod{24}$, אז גם $a \equiv b \pmod 6$ כי $6 \mid 24$.
$f$ הומומורפיזם כי $f([a] + [b]) = f([a + b]) = (a + b) \pmod 6 = a \pmod 6 + b \pmod 6 = f([a]) + f([b])$.
$f$ על כי לכל $[a] \in \mathbb{Z}_6$, $f([a]) = [a]$ (שימו לב שניתן לבחור אותו נציג למרות שיחס השקילות משמאל ומימין שונה).

$$\ker(f) = \{[a] \in \mathbb{Z}_{24} | f([a]) = 0 \bmod 6\} = \{[a] \in \mathbb{Z}_{24} | a \bmod 6 = 0 \bmod 6\} = 6\mathbb{Z}_{24}$$

ולכן $\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_6$ לפי משפט איזומורפיזם הראשון.

ב. $(\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})/(3\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})$ איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_{24}/3\mathbb{Z}_{24}$ לפי משפט האיזומורפיזם השלישי, והיא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$.

**שאלה 2.** לחבורה $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ יש בדיוק שלוש תת־חבורות מאינדקס 4. מצאו את כולן ובדקו האם חבורות המנה לגביהן הן איזומורפיות.

פתרון. תת־החבורות הן $H_1 = 4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ ו-$H_3 = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$. חבורות המנה $G/H_1$ ו-$G/H_2$ שתיהן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ואילו $G/H_3$ איזומורפית ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**שאלה 3.** תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל $i$). הוכיחו כי:

א. $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$.

ג. לכל שתי חבורות חבורות $G, H$, מתקיים: $\mathrm{Inn}(G \times H) \cong \mathrm{Inn}(G) \times \mathrm{Inn}(H)$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1 \times \cdots \times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1 \times \cdots \times G_n$. כדי להראות שהיא נורמליות, נבדוק שהיא סגורה להצמדה באיבר של $G_1 \times \cdots \times G_n$. יהיו

$$(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n, \qquad (h_1, \ldots, h_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1,\dots,g_n)(h_1,\dots,h_n)(g_1,\dots,g_n)^{-1} &= (g_1h_1,\dots,g_nh_n)\left(g_1^{-1},\dots,g_n^{-1}\right)\\ &= \left(g_1h_1g_1^{-1},\dots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1 \leq i \leq n$, תת־החבורה $H_i$ נורמלית ולכן $g_ih_ig_i^{-1} \in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1},\dots,g_nh_ng_n^{-1}\right) \in H_1\times\cdots\times H_n$, כדרוש.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה כך פותרים את שני הסעיפים הראשונים בבת אחת). מפני ש-$H_i \lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}/_{H_i}$ חבורה לכל $i$, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}/_{H_1}\times\cdots\times{}^{G_n}/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi\colon G_1\times\cdots\times G_n &\to {}^{G_1}/_{H_1}\times\cdots\times{}^{G_n}/_{H_n}\\ (g_1,\dots,g_n) &\mapsto (g_1H_1,\dots,g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi(g_1,\dots,g_n)\,\pi(g_1',\dots,g_n') &= (g_1H_1,\dots,g_nH_n)(g_1'H_1,\dots,g_n'H_n)\\ &= (g_1g_1'H_1,\dots,g_ng_n'H_n) = \pi(g_1g_1',\dots,g_ng_n')\\ &= \pi((g_1,\dots,g_n)(g_1',\dots,g_n'))\end{aligned}$$

אגב, לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i\colon G_i\to K_i$ הפונקציה $f\colon \prod_i G_i\to\prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-$i$ נקבל $g_i\mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של $\pi$:

$$\begin{aligned}\ker\pi &= \left\{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \,\middle|\, \pi(g_1,\dots,g_n) = e_{G_1/H_1\times\cdots\times G_n/H_n}\right\}\\ &= \{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \,|\, (g_1H_1,\dots,g_nH_n) = (H_1,\dots,H_n)\}\\ &= \{(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \,|\, \forall i: g_i\in H_i\} = H_1\times\cdots\times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

ג. ראינו בתרגול שבכל חבורה $G/Z(G)\cong\operatorname{Inn}(G)$. נעזר בכך בתכונה $Z(G\times H) = Z(G)\times Z(H)$ (ודאו שאתם יודעים להוכיח את זה!) ולכן

$$\begin{aligned}\operatorname{Inn}(G\times H) &\cong (G\times H)/Z(G\times H) = (G\times H)/(Z(G)\times Z(H))\\ &\cong (G/Z(G))\times(H/Z(H)) \cong \operatorname{Inn}(G)\times\operatorname{Inn}(H)\end{aligned}$$

כאשר האיזומורפיזם בין השורות הוא מקרה פרטי של הסעיף הקודם.

**שאלה 4.** נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ (מוכרת לכם?).

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-$G$ הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. תהי $H = \left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{3}{14}+\mathbb{Z}\right\rangle$. הוכיחו כי $H$ היא ציקלית ומצאו את האינדקס $[G:H]$.
רמז: למעשה רוצים למצוא $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ כך ש-$H = \left\langle\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right\rangle$, ולוודא הכלה דו־כיוונית.

פתרון.

א. איבר היחידה בחבורה $G$ הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}+0$. לכן יש למצוא לכל $x\in G$ מספר טבעי $n\in\mathbb{N}$ כך שנקבל $n\cdot x+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-$n$.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b}+\mathbb{Z}$ עבור $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}$. נשים לב כי $b\cdot\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right) = a+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן $x$ הוא לכל היותר מסדר (סופי) $b$. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של $x$ במקרה זה הוא בדיוק $b$. מכאן ברור שבקבוצת האיברים $\left\{\frac{1}{n}+\mathbb{Z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ יש איברים מסדר גדול כרצוננו.

ב. יש להוכיח שקיים $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $H = \left\langle \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \right\rangle$. נראה שאפשר לבחור את $\frac{a}{b} = \frac{1}{70}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים (ממינימליות של ת"ח נוצרת).
נשים לב כי $\frac{1}{70} = 7 \cdot \frac{2}{5} - 13 \cdot \frac{3}{14}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z} \right\rangle \subseteq H$. מצד שני $\frac{2}{5} = 28 \cdot \frac{1}{70}$, $\frac{3}{14} = 15 \cdot \frac{1}{70}$, ולכן $H = \left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
סדר תת־החבורה $H$ הוא 70 ואילו $G$ היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם מחלקים את 70 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

**שאלה 5.** ראינו בתרגיל הקודם את חבורת הארבעה של קליין:

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\,, (1\ 3)\,(2\ 4)\,, (1\ 4)\,(2\ 3)\} \leq S_4$$

מצאו סדרה של תתי־חבורות

$$\{\mathrm{id}\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$$

כך שלכל $i$ מתקיים $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל $i$ המנה ${}^{G_i}\!/\!{}_{G_{i+1}}$ היא חבורה ציקלית. רמז: העזרו בתת־חבורה נורמלית מוכרת אחרת של $S_4$.
הערה: סדרות כאלה נקראות סדרות הרכב, ואם המנות ${}^{G_i}\!/\!{}_{G_{i+1}}$ בסדרה אכן ציקליות, החבורה נקראת פתירה. זו תכונה חשובה מאוד של חבורה, גם מחוץ למסגרת הקורס.

פתרון. ניזכר כי $A_4 \lhd S_4$ (כי היא תת־חבורה מאינדקס 2), וכעת הוכחנו $V \lhd S_4$. בנוסף $V \lhd A_4$, וקיבלנו שרשרת

$$\{\mathrm{id}\} \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

נחשב כל מנה: $A_4 \lhd S_4$ מאינדקס 2, ולכן ${}^{S_4}\!/\!{}_{A_4} \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית.
$V \lhd A_4$ והאינדקס הוא $[A_4 : V] = \dfrac{|A_4|}{|V|} = \dfrac{12}{4} = 3$, כלומר ${}^{A_4}\!/\!{}_{V}$ היא חבורה מסדר 3, כלומר היא ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$.
אבל $V \cong {}^{V}\!/\!{}_{\{\mathrm{id}\}}$ היא אבלית שאינה ציקלית (כי אין שם איבר מסדר 4 – האיברים הלא טריוויאלים הם מסדר 2). אז חסרה עוד תת־חבורה נורמלית. נעדן את השרשרת ונוסיף את

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle (1\ 2)\,(3\ 4) \rangle \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

תת־החבורה $H = \langle (1\ 2)\,(3\ 4) \rangle$ היא מסדר 2, כי $|H| = o\left((1\ 2)\,(3\ 4)\right) = 2$. מכאן $[V : H] = 2$, כלומר $H \lhd V$, וכן ${}^{V}\!/\!{}_{H} \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית. כמו כן, ${}^{H}\!/\!{}_{\{\mathrm{id}\}} \cong H \cong \mathbb{Z}_2$ גם היא ציקלית. לכן השרשרת האחרונה שקיבלנו מתאימה לתנאי השאלה.

**שאלה 6.** הוכיחו כי אם $G$ חבורה פשוטה, $H$ חבורה כלשהי ו- $f : G \to H$ הומומורפיזם לא טריוויאלי, אז $f$ מונומורפיזם.

פתרון. גרעין של הומומורפיזם הוא ת"ח נורמלית. כיוון ש-$G$ פשוטה, נובע מכך ש-$ker(f) =$ $\{e\}$ או $ker(f) = G$.
כי הנחנו ש-$f$ לא טריוויאלי, לכן בהכרח $ker(f) \neq G$, $ker(f) = \{e\}$, וזה שקול, כידוע, לכך ש-$f$ מונומורפיזם.

**שאלה 7.** תהי $G$ חבורה ותהי $H \lhd G$. הוכיחו כי:

א. אם $H$ ת"ח מקסימלית של $G$ (כלומר: אין $H \leq N \leq G$, אלא אם כן $N = H$ או $N = G$), אז $[G : H]$ סופי וראשוני.

ב. $H$ ת"ח נורמלית מקסימלית של $G$ (כלומר: אין $H \lhd N \lhd G$, אלא אם כן $N = H$ או $N = G$) אם ורק אם אין ל-$G/H$ ת"ח נורמליות לא טריוויאליות.

פתרון.

א. לפי משפט ההתאמה, כל ת"ח של $G/H$ היא מהצורה $N/H$ עבור ת"ח $H \lhd N \lhd G$, לכן אם $H$ ת"ח מקסימלית של $G$, תתי-החבורות היחידות של $G/H$ הן הטריוויאליות: $G/H$ עצמה ו-$H/H$ שאיזומורפית ל-$\{e\}$.
יהי $g \in G \setminus H$ (נניח שיש כזה, אחרת $G = H$ ואז $[G : H] = 1$. אמנם 1 לא ראשוני, אך זה מקרה מנוון). נסתכל על תת-החבורה הנוצרת על ידי $g$: $< gH > \leq G/H$.
כיוון שאין ל-$G/H$ ת"ח לא טריוויאליות, בהכרח $G/H =< gH >$, ולכן $G/H$ ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_n$או ל-$\mathbb{Z}$ בהתאם לסדר שלה.
לא ייתכן ש-$G/H \cong \mathbb{Z}$ כי אין לה תתי-חבורות לא טריוויאליות ול-$\mathbb{Z}$ יש ($n\mathbb{Z}$ לכל $n \in \mathbb{N}$), לכן $G/H \cong \mathbb{Z}_n$. אך גם ל-$\mathbb{Z}_n$יש תתי-חבורות לא טריוויאליות ($m\mathbb{Z}_n$לכל $m \mid n$),
אלא אם כן $n$ ראשוני (כי אז אין לו מחלקים). לכן בהכרח $G/H \cong \mathbb{Z}_n$ עבור $n$ ראשוני, וזה אומר ש- $[G : H] = n$ סופי וראשוני.

ב. אם $H$ אינה ת"ח נורמלית מקסימלית של $G$, אז קיימת ת"ח אמיתית $H \lhd N \lhd G$, ואז לפי משפט ההתאמה, $N/H$ ת"ח נורמלית לא טריוויאלית של $G/H$.
אם יש ל-$G/H$ ת"ח נורמלית לא טריוויאליות, לפי משפט ההתאמה, היא מהצורה $N/H$ עבור ת"ח אמיתית $H \lhd N \lhd G$, ואז $H$ אינה ת"ח נורמלית מקסימלית של $G$.

**בהצלחה!**