תרגול 2 - תכונות של פונקציות מרוכבות

הגדרות

- f רציפה ב- z_0 אם $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.
- f גזירה ב- z_0 אם הגבול $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ קיים, והנגזרת $f'(z_0)$ שווה לגבול הזה .
- f דיפרנציאבילית ב- z_0 אם קיימים $\alpha\in\mathbb{C}$ ו- $\phi(z)$ כך שבסביבת z_0 מתקיים: $f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+\phi(z)$ ו- $\lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z)}{z-z_0}=0$.
- f אנליטית ב- z_0 אם f גזירה בסביבה שלימה המכילה את z_0.
- f אנליטית בתחום D אם f גזירה בכל נקודה $z\in D$.
- תהי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$.
  f מקיימת את משוואות קושי-רימן אם $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$.

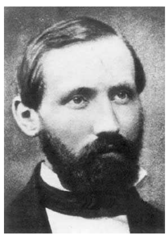
תהי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$.

משוואות קושי רימן בקורדינטות פולאריות: $\begin{cases} u_r=\dfrac{1}{r}v_\theta \\ v_r=-\dfrac{1}{r}u_\theta \end{cases}$.

משפטים

- $f(z)$ גזירה ב- z_0 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ דיפרנציאבילית ב- z_0.
- $f=u+iv$ גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$ $\Leftarrow$ f מקיימת משוואות קושי-רימן ב- (x_0,y_0).
- f מקיימת משוואות קושי-רימן, ו- u_x,u_y,v_x,v_y רציפות ב- (x_0,y_0) $\Leftarrow$ $f=u+iv$ דיפרנציאבילית ב- $z_0=x_0+iy_0$ (כלומר גזירה ב- z_0).
- $f=u+iv$ גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$ $\Leftrightarrow$ f מקיימת משוואות קושי-רימן ו- $u(x,y),v(x,y)$ דיפרנציאביליות ב- (x_0,y_0).
- f גזירה ב- z אזי $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$.
- f גזירה ב- z אזי בקורדינטות פולאריות $f'(z)=\big(\cos\theta-i\sin\theta\big)\cdot(u_r+iv_r)$.

Augustin Louis Cauchy
1789-1857



Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826-1866

1. בדקו אם הפונקציות הבאות רציפות/גזירות/אנליטיות ב־ $z=0$:

(א) $f(z)=\overline{z}$.

(ב) $g(z)=|z|^2$.

(ג) $h(z)=\overline{z}-4z^3$.

<u>פתרון:</u>

(א) <u>רציפות</u>־ $f(z)=f(x+iy)=x-iy \Rightarrow \quad u(x,y)=x, \quad v(x,y)=-y$
f רציפה כסכום סופי של פונקציות רציפות. (למעשה f רציפה בכל $\mathbb{C}$).
<u>גזירות</u>־ נבדוק את הגבול בשני כיוונים ,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}-0}{z-0}=\lim_{x\to 0^+,y=0}\frac{x-iy-0}{x+iy-0}=1$$
$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}-0}{z-0}=\lim_{x=0,y\to 0^+}\frac{x-iy-0}{x+iy-0}=-1$$

שני הגבולות שונים ולכן f לא גזירה ב־ $z=0$.
דרך שנייה היא לבדוק משוואות קושי־רימן:

$$u_x(x,y)=1 \;\neq\; v_y(x,y)=-1$$
$$u_y(x,y)=0 \;\neq\; -v_x(x,y)=0$$

ושוב קיבלנו שמשוואות קושי־רימן לא מתקיימות באף נקודה, כלומר אין גזירות באף נקודה, בפרט f לא גזירה ב־ $z=0$.
<u>אנליטיות</u>־ f לא גזירה ב־ $z=0$ ולכן גם לא אנליטית ב־ $z=0$.

(ב) <u>רציפות</u>־ $g(z)=f(x+iy)=x^2+y^2 \Rightarrow \quad u(x,y)=x^2+y^2, \quad v(x,y)=0$
g רציפה כסכום סופי של פונקציות רציפות. (למעשה g רציפה בכל $\mathbb{C}$).
<u>גזירות</u>־ נבדוק את משוואות קושי־רימן,

$$\begin{array}{lcl} u_x(x,y)=2x & \stackrel{?}{=} & v_y(x,y)=0 \\ u_y(x,y)=2y & \stackrel{?}{=} & -v_x(x,y)=0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad x=y=0$$

משוואות קושי־רימן מתקיימות ב־ $z=0$, בנוסף u,v דיפרנציאבליות כפונקציות של x,y ולכן g גזירה ב־ $z=0$.
<u>אנליטיות</u>־ g אמנם גזירה ב־ $z=0$ אבל לא בשום נקודה אחרת, ולכן לא אנליטית ב־ $z=0$.

(ג) <u>רציפות</u>־ $h(z)=\overline{z}-4z^3$ רציפה כסכום רציפות (אפילו בכל המישור).
<u>גזירות</u>־ $4z^3$ גזירה בכל המישור, אבל $\overline{z}$ לא גזירה ב־ $z=0$. לכן אם h גזירה ב־ $z=0$ אזי גם אזי $h(z)+4z^3=\overline{z}$ גזירה ב־ $z=0$ ־ סתירה. h לא גזירה ב־ $z=0$.
<u>אנליטיות</u>־ h לא גזירה ב־ $z=0$ ולכן בודאי h לא אנליטית ב־ $z=0$.

2. f נקראת דיפרנציאבילית בנקודה z_0 אם קיים $\alpha \in \mathbb{C}$, כך שבסביבת z_0 ניתן להציג את f בצורה: $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \phi(z)$, וכאשר $\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{z-z_0} = 0$.

(א) הוכיחו כי f דיפרנציאבילית ב־ z_0 אם"ם f גזירה בנק' זו. הסיקו כי מתקיים $\alpha = f'(z_0)$.

(ב) הוכיחו את הגרסה הבאה של כלל לופיטל .
יהיו f, g גזירות בנקודה z_0 וכך ש: $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$,
אז מתקיים: $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

<u>פתרון:</u>

(א) $\Leftarrow$
נניח ש־ f דיפרנציבילית ב־ z_0, צריך להוכיח כי f גזירה ב־ z_0. לפי הנתון קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ כך ש: $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \phi(z)$, וכאשר $\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{z-z_0} = 0$.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\alpha(z - z_0) + \phi(z)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \left(\alpha + \frac{\phi(z)}{z - z_0}\right) = \alpha$$

כלומר f גזירה ב־ z_0 ומתקיים $f'(z_0) = \alpha$.

$\Longrightarrow$
נניח ש־ f גזירה ב־ z_0, וצריך להוכיח ש־ f דיפרנציאבילית ב־ z_0. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$\phi(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$$

ונחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0$$

כלומר קיבלנו ש־ $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z)$ דיפרנציבילית ב־ z_0.

(ב) f, g גזירות ב־ z_0 ולכן דיפרנציאביליות ב־ z_0, כלומר מתקיים:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi_1(z) \quad ; \quad \lim_{z\to z_0} \frac{\phi_1(z)}{z - z_0} = 0$$

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \phi_2(z) \quad ; \quad \lim_{z\to z_0} \frac{\phi_2(z)}{z - z_0} = 0$$

ולכן:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi_1(z)}{g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \phi_2(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z_0) + \frac{\phi_1}{z-z_0}}{g'(z_0) + \frac{\phi_2}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

3. תהי f גזירה בתחום D ונניח ש־ $|f(z)| = const$ לכל $z \in D$.
הוכיחו כי f קבועה ב־ D .

<u>פתרון:</u> אם $|f(z)| = const \equiv 0$ לכל $z \in D$ אזי $f(z) \equiv 0$ לכל $z \in D$.
<u>אחרת</u> $|f(z)| = c \neq 0$, c קבוע ממשי .
כלומר אם $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ אזי $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = c^2$. נגזור לפי x ו־ y ונקבל:

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכיון ש־ $u^2+v^2=c^2\neq 0$ אזי $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\neq\vec{0}$, כלומר מצאנו למערכת הומוגנית פתרון לא טרויאלי, ולכן $\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}=0$, כלומר:

$$\begin{aligned} u_xv_y-u_yvx=0 \quad &\Rightarrow \quad (u_x)^2+(u_y)^2=0 \ \Rightarrow \ u_x=u_y=0 \ \Rightarrow \ u(x,y)=const \\ &\Rightarrow \quad (v_x)^2+(v_y)^2=0 \ \Rightarrow \ v_x=v_y=0 \ \Rightarrow \ v(x,y)=const \end{aligned}$$

ובסה"כ קיבלנו ש־ f קבועה ב־ D.

4. תהי f אנליטית ב־ $\mathbb{C}$ ונניח ש־ $\big(\mathrm{Re}(f)\big)^2=\mathrm{Im}(f)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי f קבועה ב־ $\mathbb{C}$.

<u>פתרון:</u> נסמן $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, ולכן מהנתון נקבל $u^2=v$. f אנליטית ולכן מתקיימות משוואות קושי־רימן:

$$u_x=v_y=2uu_y=2u(-v_x)=2u\cdot(-2uu_x)=-4u^2u_x \quad\Longrightarrow\quad u_x\underbrace{(1+4u^2)}_{>0}=0 \quad\Longrightarrow\quad u_x=0$$

באופן דומה נוכל להסיק ש־ $u_y=0$ ולכן $u(x,y)$ קבועה.
מטיפול סימטרי עבור $v(x,y)$ נקבל ש־ $v_x=v_y=0$ כלומר $v(x,y)$ קבועה ובסה"כ $f(z)$ קבועה.

5. נניח $f(x)=u(x,y)+iv(x,y)$ אנליטית ב־ $z=0$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית ב־ $z=0$.

<u>פתרון:</u> f אנליטית ב־ $z=0$ ולכן מתקיימות משוואות קושי־רימן וכן u,v דיפרנציאביליות בסביבת $z=0$.

$$g(x+iy)=\overline{f(x-iy)}=\underbrace{u(x,-y)}_{\widetilde{u}(x,y)}+i\cdot\big(\underbrace{-v(x,-y)}_{\widetilde{v}(x,y)}\big)$$

$\widetilde{u},\widetilde{v}$ גם הן דיפרנציאביליות בסביבת $z=0$, ולכן נבדוק משוואות קושי רימן לגביהן:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(x,y)&=u_x(x,-y) & \qquad \widetilde{v}_y(x,y)&=v_y(x,-y) \\ \widetilde{u}_y(x,y)&=-u_y(x,-y) & \qquad \widetilde{v}_x(x,y)&=-v_x(x,-y) \end{aligned}$$

f אנליטית ב־ $z=0$ ולכן קיים רדיוס $r>0$ כך ש־ f מקיימת משוואות קושי־רימן בסביבה שלמה $D=\{z\ :\ |z|\leq r\}$. לכן אם $z=x+iy\in D$ אזי $\overline{z}=x-iy\in D$ ומתקיימות משוואות קושי־רימן גם ב־ $x-iy$, כלומר:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(x,y)&=u_x(x,-y)=v_y(x,-y)=\widetilde{v}_y(x,y) \\ \widetilde{u}_y(x,y)&=-u_y(x,-y)=v_x(x,-y)=-\widetilde{v}_x(x,y) \end{aligned}$$

כלומר g מקיימת משוואות קושי־רימן ב־ $z=0$