תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. תהיינה $f(z)$ ו $g(z)$ פונקציות שלמות כך ש $|f(z)| < |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z) = cg(z)$ כך ש $c \in \mathbb{C}$ עם $|c| < 1$.

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

   (א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

   (ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

3. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

4. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z-a| = R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \leq M$ לכל z כך ש $|z-a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$