פונקציות מרוכבות – תרגיל 10

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של הנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.
עוד נניח כי ל- f קוטב מסדר 2 ב- z_0, ל- g אפס מסדר 3 ב- z_0 ל- r אפס מסדר 2 ול- h אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של:

א. $\dfrac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

ב. $\dfrac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

בנקודה z_0?

2. נניח ש- $f(z)$ פונקציה שלימה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \frac{1}{n^n}$. הוכיחו ש- $f(z)$ פונקציה קבועה. (רמז: מהו סדר ההתאפסות בראשית?)

3. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = \big|1-|z|\big|$ לכל z מרוכב?

4. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''\left(\frac{1}{n!}\right) + f\left(\frac{1}{n!}\right) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

א. $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{1/z^2}}\, dz$

ב. $\displaystyle\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin\frac{1}{z}\, dz$

ג. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}\, dz$

ד. $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z}\, dz$ כאשר γ היא הריבוע שקדקודיו בנקודות $\pm 4 \pm 4i$