

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 4

14 בדצמבר 2019

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, והוכיחו שהן רציפות בתחום ההגדרה:

$$(א) f(z) = \frac{z^3 - 5z^2 + i}{z^3 + 8i}$$

$$(ב) f(x + yi) = (x \operatorname{cis} y)(y \operatorname{cis} x)$$

$$(ג) f(x + yi) = \frac{\sin(xy)}{(x \operatorname{cis} y)((x+1) \operatorname{cis} y)}$$

$$(ד) f(z) = \operatorname{Im}(\bar{z}) \cdot \operatorname{Re}(z) + z \bar{z} i$$

$$(ה) f(x + yi) = (x \operatorname{cis} y)(x \operatorname{cis}(-y))$$

$$(ו) f(x + yi) = e^x \operatorname{cis} y$$

פתרון:

א. זו מנה של פולינומים. נמצא מתי המכנה מתאפס:

$$z^3 + 8i = 0 \iff z^3 = -8i = 8 \operatorname{cis} 270$$

ולכן נקבל:

$$z_k = 2 \operatorname{cis}(90 + 120k), k \in \{0, 1, 2\}$$

כלומר, יש 3 נקודות לא מוגדרות. בשאר היא רציפה כמנה של פולינומים.

ב. נחלק לממשי ומדומה: $f(x + yi) = xy \operatorname{cis}(x + y) = xy \cos(x + y) + ixy \sin(x + y)$, כלומר,

$$U(x, y) = xy \cos(x + y)$$

$$V(x, y) = x y \sin(x + y)$$

שתיהן רציפות, ולכן f רציפה.

ג. פה יוצא פונקציה עם הרבה נקודות לא מוגדרות: אם $x = 0, 1$, לא משנה מה y . לכן באופן כללי הפונקציה לא רציפה. באופן נקודתי, בשאר הנקודות היא רציפה כמנה של רציפות (הרעיון של המכנה דומה לתרגיל קודם).

ד. יש כאן סכום, כפל והרכבה של רציפות, אז רציפה (ההרכבה: $Im(\bar{z})$).

ה. נקבל: $f(x + yi) = x^2 \text{cis} 0 = x^2$ שהיא כמובן רציפה.

ו. נחלק לממשי ומדומה: $f(x + yi) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. כלומר:

$$U(x, y) = e^x \cos y$$

$$V(x, y) = e^x \sin y$$

שתיהן רציפות ולכן f רציפה.

2. הראו שהפונקציה הבאה לא רציפה:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

פתרון:

כמובן שהבעיה היא רציפות באפס.

נמצא סדרה $z_n \rightarrow 0$ כך שמתקיים: $f(z_n) \not\rightarrow f(z_0) = 1$. נבחר: $z_n = -\frac{1}{n}$, ונקבל:

$$f(z_n) = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -1 \not\rightarrow 1$$

הערה: כמובן שגם אם היינו מגדירים $f(0) = -1$ זה לא היה רציף באפס כי אז היינו

יכולים לקחת את הסדרה $z_n = \frac{1}{n}$.

בהצלחה!