תרגיל בית 4 ־אינפי 2

22 במרץ 2018

תרגיל: פתור את האיטגרלים הבאים בשיטת ההצבה:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

פתרון:

קודם כל נשים לב שהאינטגרל מזכיר לנו את האינטגר של $arcsin(x)$, ולכן אנו צריכים לסדר קצת את הביטוי:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}$$

$$t=\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$dt=\sqrt{\frac{3}{2}}dx$$

נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$$\int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}arcsin(t)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}arcsin(\sqrt{\frac{3}{2}}x)+C$$

2) $\int \sqrt{1-sin(2x)}dx$

פתרון:

נבצע כפל בצמוד של $1-sin(2x)$ כלומר נכפול את המונה ואת המכנה ב־$\sqrt{1+sin(2x)}$ ונקבל את הביטוי הבא:

$$\int \frac{\sqrt{1-sin^2(2x)}}{\sqrt{1+sin(2x)}}dx=\int \frac{cos(2x)}{\sqrt{1+sin(2x)}}$$

עכשיו קל לראות שהמונה הוא נגזרת של $sin(2x)$ ולכן נבצע את ההצבה הבאה: $t=1+sin(2x)$, $dt=2cos(2x)dx$

נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C=\sqrt{1+sin(2x)}+C$$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

פתרון:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

נציב $t = \sqrt{x^2+1}$

$$dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$x^2 = t^2 - 1$$

נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}ln\left|t-1\right| - \frac{1}{2}ln\left|t+1\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \frac{1}{2}ln(\sqrt{x^2+1}+1) + C$$

4) $\int cos^2(x)\sqrt{sin(x)}dx$

פתרון:

נציב $t = sin(x)$

$$dt = cos(x)dx$$

$$cos^2(x) = 1 - t^2$$

נציב את הכל באינטגרל שלנו ונקבל:

$$\int(1-t^2)^2\sqrt{t}dt = \int(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{5}})dt = \frac{t^{1.5}}{1.5} - \frac{2t^{3.5}}{3.5} + \frac{t^{4.5}}{4.5} + C =$$

$$= \frac{sin^{1.5}(x)}{1.5} - \frac{2sin^{3.5}(x)}{3.5} + \frac{sin^{4.5}(x)}{4.5} + C$$

5) $\int x^3 \cdot e^{-x^2}dx$

פתרון:

$$t = -x^2$$

$$dt = -2xdx$$

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-te^t)dt = \frac{1}{2}\int t\cdot e^t dt = \frac{1}{2}\int t\cdot e^t dt$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$f' = e^t, g = t$$

$$f = e^t, g' = 1$$

$$= \frac{1}{2}(t\cdot e^t - \int e^t dt) = \frac{1}{2}(t\cdot e^t - e^t) + C = \frac{1}{2}(-x^2\cdot e^{-x^2} - e^{-x^2}) + C$$

6) $\int x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}dx$

פתרון:

$t=\sqrt{x}$ ולכן $x=t^2$ ולכן $dx=2tdt$, נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$\int\frac{dt}{t}=\int t^4\cdot e^t 2tdt=2\int t^5 e^t dt$

נעשה שימוש חוזר באינטגרציה בחלקים

7) $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

פתרון:

קל לראות שהמונה הוא הנגזרת של המכנה, ולכן נציב

$dt=(e^x-e^{-x})$, $t=e^x+e^{-x}$

$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{dt}{t}=ln\left|t\right|+C=ln(e^x+e^{-x})+C$

פתרון:

8) $\int\frac{e^{tan(x)}sin(x)}{cos^3(x)}dx$

פתרון:

$\int\frac{e^{tan(x)}sin(x)}{cos^3(x)}dx=\int\frac{e^{tan(x)}sin(x)}{cos^2(x)cos(x)}dx=\int\frac{e^{tan(x)}tan(x)}{cos^2(x)}dx$

עכשיו קל לראות ש־$\frac{1}{cos^2(x)}$ היא הנגזרת של $tan(x)$ ולכן נציב:

$t=tan(x)$, $dt=\frac{dx}{cos^2(x)}$ נציב באינטגרל שלנו לנקבל:

$\int e^t\cdot tdt$, נעשה אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$e^t\cdot t-e^t=e^{tan(x)}\cdot tan(x)-e^{tan(x)}+C$

9) $\int e^{2x+e^x}dx$

תרגילים מהמבחנים

1) $\int\frac{sin(x)cos(x)}{a^2cos^2(x)+b^2sin^2(x)}dx$

פתרון:

נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבאה: $cos^2(x)+sin^2(x)=1$

ונקבל $\int\frac{sin(x)cos(x)dx}{a^2(1-sin^2(x))+b^2sin^2(x)}=\int\frac{sin(x)cos(x)}{a^2+(b^2-a^2)sin^2(x)}dx$

קל לראות שהמונה הוא הנגזרת של $\frac{sin^2(x)}{2}$ ולכן נציב

$t=sin^2(x)$, $dt=2sin(x)cos(x)dx$ ולכן $\frac{dt}{2}=sin(x)cos(x)dx$

נציב באינטגרל ונקבל:

$\int\frac{dt}{2(a^2+(b^2-a^2)t)}$

נעשה שוב הצבה: $u=t(b^2-a^2)+a^2$ ולכן $du=(b^2-a^2)dt$

ונקבל:

$$\frac{1}{2(b^2-a^2)}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\cdot ln\left|u\right|+C=\frac{1}{2(b^2-a^2)}ln\left|t(b^2-a^2)+a^2\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2(b^2-a^2)}ln\left|sin^2(x)\cdot(b^2-a^2)+a^2\right|+C$$

2) $\int\frac{3xdx}{\sqrt{9+x^2}}$

פתרון:

נשים לב שהמונה נראה כמו הנגזרת של $9+x^2$ ולכן נציב:

$t=9+x^2$, $dt=2xdx$ ולכן $\frac{dt}{2}=xdx$

נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$$\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=3\cdot\sqrt{t}+C=3\cdot\sqrt{9+x^2}+C$$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$

פתרון:

נרצה להיפתר מהשורשים שבביטוי, כלומר נרצה למצוא הצבה כדי לקבל חזקות שלמות ולכן נבחר t^k כך ש־k יתחלק גם ב־2 וגם ב־3 והמספר הזה הוא 6, כלומר נסמן:

$t^6=x$ ולכן $t=\sqrt[6]{x}$, $t^2=\sqrt[3]{x}$, $t^3=\sqrt{x}$, $6t^5dt=dx$

נציב את הכל באינגרל ונקבל:

$$\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\cdot\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\cdot\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=6\cdot\left(\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt\right)=6\cdot(t-arctan(t))+C$$

$$=6\cdot(\sqrt[6]{x}-arctan(\sqrt[6]{t}))+C$$

4) $\int\frac{sin^3(x)}{cos(x)}dx$

פתרון:

$$\int\frac{(1-cos^2(x))sin(x)}{cos(x)}dx$$

נציב $t=cos(x)$, $dt=-sin(x)dx$

$$-\int\frac{(1-t^2)dt}{t}=\int tdt-\int\frac{dt}{t}=\frac{t^2}{2}-ln|t|+C=\frac{cos^2(x)}{2}-ln|cos(x)|+C$$

5) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

פתרון:

$t=x+1$ ולכן $x=t-1$ ולכן $dx=dt$

$$\int\frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}}=\int\sqrt{t}dt-\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=t^{\frac{3}{2}}-2\cdot\sqrt{t}+C=(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\cdot\sqrt{x+1}+C$$

6) $\int arctan(\frac{1}{x})dx$

פתרון:

נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$g = arctan(\frac{1}{x})$,$f^{'} = 1$

$g^{'} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$,$f = x$

$\int arctan(\frac{1}{x})dx = xarctan(\frac{1}{x}) + \int \frac{x}{x^2+1}dx$

$\frac{dt}{2} = xdx$ ולכן $t = x^2 + 1$

$= arctan(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = arctan(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}ln\,|t| = arctan(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C$