

קורס: 83-211-01
מרצה: ש. הורוביץ
כ"ג ניסן תשע"ב

מבחן בפונקציות מרוכבות

מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. נניח ש- z ו- w הם שני מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(zw) = 0$ אז
בהכרח $z = \bar{w}$ או $z = -w$ שניהם ממשים.

2. נניח ש- $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ היא פונקציה אנליטית בתחום
 $D \subset \mathbb{C}$. נגדיר $g(x, y) = e^{u(x, y)} \cos[v(x, y)]$. הוכיחו ש- g פונקציה הרמונית ב- D .

3. חשבו: $\int_{\gamma} \bar{z} \sin z \, dz$ כאשר γ הוא המעגל $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$
מתואר נגד כיוון השעון.

4. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

5. הוכיחו שכל האפסים של הפונקציה $f(z) = \frac{z^5 - 3z^3 + 2z - 2}{z^4 + z + 5}$ הם בעיגול
 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$

6. קבעו את סדר הקוטב של הפונקציה $f(z) = \frac{(z-\pi)^2}{(\sin z)^5} - \frac{1}{(1+\cos z)^2}$ בנקודה $z = \pi$.
הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!