בס"ד

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 7- פתרון

1. הצלע האנכית של מלבן מתארכת בקצב של ס"מ 1 בשניה. הצלע האופקית מתקצרת באותו קצב (ס"מ 1 בשניה). בזמן $t=$ שניה אחת המלבן היה ריבוע בעל צלעות באורך של 2 ס"מ. מהי מהירות השינוי של השטח של המלבן בזמן $t=2$ שניות?

פתרון:

נסמן : t - זמן

a-אורך הצלע האנכית

b-אורך הצלע האופקית

S-שטח המלבן

נתון כי בזמן $t=1$ $a(1)=2$, $b(1)=2$

וכן נתון $\frac{da}{dt}=1$ ו-$\frac{db}{dt}=-1$.

צריך למצוא $\frac{dS}{dt}(2)$.

$\frac{dS}{dt}=b(t)\frac{da}{dt}+a(t)\frac{db}{dt}$ וכן $a(2)=3, b(2)=1$ ולכן

$\frac{dS}{dt}(2)=b(2)\cdot\frac{da}{dt}(2)+a(2)\cdot\frac{db}{dt}(2)=1\cdot1+3\cdot(-1)=-2$.

2. לגליל נתון נפח קבוע. רדיוס הגליל גדל בקצב של מטר 1 בשניה. מצאו את קצב השינוי של גובהו של הגליל בזמן שגם רדיוסו וגם גובהו שניהם שווים מטר אחד.

פתרון:

נסמן t-זמן

V-נפח הגליל

r-רדיוס הגליל

h-גובה הגליל

נתון $\frac{dr}{dt}=1$ וכן נתון שבזמן t_0 $r(t_0)=h(t_0)=1$.

צריך למצוא $\frac{dh}{dt}(t_0)=?$.

$V(t)=\pi\cdot r^2(t)\cdot h(t)$ ולכן $0=\frac{dV}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$ (הנגזרת אפס, כי נתון שהנפח קבוע) ומכאן $\frac{dh}{dt}=\frac{-2\pi rh\frac{dr}{dt}}{\pi r^2}=\frac{-2h\frac{dr}{dt}}{r}=\frac{-2\cdot1\cdot1}{1}=-2$

3. מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות רציפות.

ב. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x^3}$

פתרון: $x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x^2(1-x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$, כלומר $D(f)=(-\infty,1]$ ובתחום זה הפונקציה רציפה כשורש של פונקציה אי שלילית רציפה.

אפשר גם להגיד שהפונקציה רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות:

$\forall x\in(-\infty,1]\quad g(x)=x^2-x^3\ge 0$ ו- $h(x)=\sqrt[4]{x}$. $f(x)=(h\circ g)(x)$

ג. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x\ge 2, x\ne 4\\ \dfrac{2}{3} & x=4\end{cases}$

פתרון: $D(f)=[2,\infty)$. לכל $x\in[2,4)\cup(4,\infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=st\left(\frac{2\left(\sqrt{2+\vartriangle x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9+2\vartriangle x}+3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $x=4+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x\ne 0$.

קיבלנו $f(4)=\dfrac{2}{3}\ne\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\lim\limits_{x\to 4}f(4)$ ולכן $x=4$ נקודת אי רציפות סליקה.

4. עבור אילו ערכים של a הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=0$?

$$f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+ax^2}-\cos x}{x^2} & x>0\end{cases}$$

פתרון:

ע"מ שהפונקציה תהיה רציפה, נדרוש כי $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(5x+2)=2=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+ax^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+ax^2}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+ax^2-\cos^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+\sin^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2}{x^2\left(\sqrt{1+ax}+\cos x\right)}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{\sqrt{1+ax^2}+\cos x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+ax^2}+\cos x}$$

$$=st\left(\frac{a}{\sqrt{1+a\triangle x^2}+\cos\triangle x}\right)+st\left(\frac{\sin^2\triangle x}{\triangle x^2}\right)st\left(\frac{1}{\sqrt{1+a\triangle x^2}+\cos\triangle x}\right)=\frac{a}{1+1}+1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

כאשר $x=\triangle x\approx 0,\ \triangle x>0$

ולכן כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב- $x=0$ צריך לדרוש $\frac{a+1}{2}=2$ ומכאן $a=3$.

5. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

א. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

(קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס).

הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

פתרון: $D(f)=[-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות

נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת **אי רציפות סליקה** .

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)}=st\left(\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x(-4+\vartriangle x)}\right)$$

כאשר $x=-2+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x>0$. במקרה זה המספר $\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x(-4+\vartriangle x)}$ הינו מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x=-2$ אינו קיים

ולכן $x=-2$ נקודת **אי רציפות מסוג שני** .

ג. $$f(x)=\begin{cases} x-5 & x\le 1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1} & x>1\end{cases}$$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}$. לכל $x<1$ הפונקציה רציפה כפונקציה לינארית, לכל $x>1$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נקודה חשודה לאי-רציפות $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=st\left(\frac{\sin\vartriangle x}{\vartriangle x}\right)st\left(\frac{1}{\vartriangle x+2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

כאשר $x=1+\vartriangle x,\ \vartriangle x>0,\ \vartriangle x\approx 0$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-5)=-4$$

הגבולות החד צדדיים סופיים ושונים ולכן $x=1$ נקודת אי רציפות **מסוג** I **(קפיצה) .**

6. האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=-5$? האם היא גזירה בנקודה זו?

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+5} & x>-5\\ \cos(x+5) & x\le -5\end{cases}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+} e^{x+5}=st\left(e^{\triangle x}\right)=1,\ x=-5+\triangle x,\ \triangle x\approx 0,\ \triangle x>0$$

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5^-} \cos(x+5)=st\left(\cos(\triangle x)\right)=1,\ x=-5+\triangle x,\ \triangle x\approx 0,\ \triangle x<0$$

כלומר $\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^-} f(x)=1=f(-5)$ ולכן הפונקציה רציפה ב- $x=-5$.

נבדוק האם הפונקציה גזירה ב- $x=-5$:

$$\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{e^{\triangle x}-1}{\triangle x}=1$$

$$\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\cos\triangle x-1}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\cos\triangle x-\cos 0}{\triangle x}=(\cos x)'\Big|_{x=0}=-\sin 0=0$$

כלומר הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}$ לא קיים ולכן הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=-5$.