תרגול 6 אלגברה לינארית 2 מדמח

28 באפריל 2021

1 פולינום אופייני ומינימלי

הגדרות ומשפטים:

1. הצבת מטריצה בפולינום: יהי $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ פולינום. הצבת המטריצה A ב־f הכוונה:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i$$

למשל עבור $f(x) = x^3 - x + 5$, ו־ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ אז

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

2. משפט קיילי המילטון: הפולינוום האופייני של A מקיים: $P_A(A) = 0$.

3. הפ"מ של מטריצה A זה הפולינום המתוקן (המקדם העליון הוא 1) בעל דרגה קטנה ביותר המאפס את A.

4. משפט: אם $f(A) = 0$ אז $m_A | f$.

5. משפט: פ"מ מכיל את כל הגורמים האי־פריקים של הפ"א.

6. מטריצה היא לכסינה אמ"ם פ"מ מל"ל שונים.

7. מעל $\mathbb{C}$ מתקיים: $tr(A)$ זה סכום הע"ע, $\det(A)$ זה מכפלת הע"ע.

תרגילים:

1. מצאו את הפ"מ של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: נמצא תחילה את הפ"א: $P_A(x) = (x-1)^2(x-2)$. לכן הפאשרויות של פ"מ:

$$m_A(x) \in \{P_A, (x-1)(x-2)\}$$

נבדוק:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה כך ש- $(A^3+A)(A-2I) = 0$, ובנוסף: $tr(A) = 2$.

(א) מצאו פ"מ.

פתרון: נתון ש-A מאפסת את הפולינום: $f(x) = (x^3+x)(x-2) = x(x^2+1)(x-2)$, ולכן נקבל ממשפט 4 לעיל נקבל $m_A|f$, ולכן:

$$m_A \in \left\{x(x^2+1)(x-2), (x^2+1)(x-2), x(x^2+1), x(x-2), x, x^2+1, x-2\right\}$$

נתון ש-A הפיכה, ולכן אין לה ע"ע 0, ולכן כל הפולינומים בעלי גורם x לא רלוונטים. נשארנו עם:

$$m_A \in \left\{(x^2+1)(x-2), x^2+1, x-2\right\}$$

נתון $tr(A) = 2$, ולכן x^2+1 לא רלוונטי, כי זאת אומרת שסכום הע"ע (מעל המרוכבים הם $\pm i$) זה סכום של $i, -i$ ולכן לא 2.

בנוסף, אם $m_A = x-2$ נקבל $A-2I = 0$, ולכן $A = 2I$ ואז $tr(A) = 14 \neq 2$.

בסה"כ:

$$m_A = (x^2+1)(x-2)$$

(ב) מצאו פ"א.

בפ"א צריכים להיות שני הגורמים (משפט 5 לעיל), בנוסף דרגתו צריכה להיות 7. לכן האפשרויות:

$$P_A(x) \in \left\{(x^2+1)(x-2)^5, (x^2+1)^2(x-2)^3, (x^2+1)^3(x-2)\right\}$$

אם $P_A = (x^2+1)(x-2)^5$ אז $tr(A) = i - i + 5 \cdot 2 = 10 \neq 2$.

אם $P_A = (x^2+1)^2(x-2)^3$ אז $tr(A) = 2i - 2i + 3 \cdot 2 \neq 2$.

ולכן $P_A = (x^2+1)^3(x-2)$ ואז אכן $tr(A) = 3i - 3i + 2 = 2$.

3. מטריצה נקראת אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אידמפוטנטית.

(א) הוכיחו שמטריצה אידמפוטנטית לכסינה.

(ב) מה האפשרויות עבור $tr(A)$?

פתרון: א. נקבל מהתנאי $A(A-I) = 0$, ולכן A מאפסת את הפולינום $f(x) = x(x-1)$ כי $f(A) = A(A-I) = 0$. $m_A | x(x-1)$. בכל מקרה, כיון שפ"מ מל"ל שונים נקבל לכסינה.

ב. פ"א יכול להיות $x^{n-k}(x-1)^k \forall 0 \leq k \leq n$, ולכן כיון שהעקבה זה סכום הע"ע היא יכולה להיות k לכל $0 \leq k \leq n$.

4. תהי A מטריצה עם פ"מ $m_A = (x-1)^2$. עבור פולינום $f(x) = x^2 + 4x + 3$ הוכיחו: $f(A)$ הפיכה.

פתרון: $f(A) = (A+3I)(A+I)$. נב"ש ש־ $f(A)$ לא הפיכה אז לפחות אחת מהבאות לא הפיכה: $A+3I, A+I$. ניזכר ש־ $A - \lambda I$ לא הפיכה אמ"ם λ ע"ע של A. לכן אם $A+I$ לא הפיכה אז -1 ע"ע, ואם $A+3I$ לא הפיכה אז -3 ע"ע. אבל ל־A יש ע"ע יחיד והוא 1, כי הגורם היחיד של הפולינום המינימלי הוא $x-1$.

5. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שהמימד של

$$W = span\{I, A, A^2, A^3, \dots\} \subset \mathbb{F}^{n\times n}$$

מקיים $\dim(A) \leq n$.

פתרון: משפט קיילי המילטון אומר $P_A(A) = 0$. פ"א הוא פולינום מהצורה

$$P_A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i + x^n$$

כעת, לפי קיילי־המילטון נקבל:

$$0 = P_A(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i + A^n \Rightarrow A^n = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i A^i$$

עד כה ראינו שהמטריצה A^n תלויה לינארית בכל קודמותיה. כעת נוכיח באינדוקציה שלכל $k \geq n$ מתקיים שהמטריצה A^k ת"ל ב- $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$.
הבסיס כאן הוא n ואותו הוכחנו לפי קיילי־המילטון.
נניח נכונות עבור k ונוכיח עבור $k+1$. מכיוון ש- $A^{k+1} = AA^k$. מהנחת האינדוקציה, A^k ת"ל ב- $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$, כלומר ישנם $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ כך ש-

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i$$

ולכן:

$$A^{k+1} = AA^k = A \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^{i+1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i A^{i+1}}_{\in span\{I,A,\ldots,A^{n-1}\}} + \beta_{n-1} A^n$$

ראינו בהתחלה ש- $A^n = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i A^i$, ולכן נציב ונקבל:

$$A^{k+1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i A^{i+1}}_{\in span\{I,A,\ldots,A^{n-1}\}} + \beta_{n-1} A^n = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i A^{i+1}}_{\in span\{I,A,\ldots,A^{n-1}\}} + \beta_{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i A^i \right) =$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i A^{i+1}}_{\in span\{I,A,\ldots,A^{n-1}\}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \cdot \beta_{n-1} A^i}_{\in span\{I,A,\ldots,A^{n-1}\}} \in span\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$$

6. שאלה מהקהל: הוכיחו: $A - \lambda I$ לא הפיכה אמ"ם λ ע"ע של A.
נעשה את שני הכיוונים בבת אחת (אבל נתחיל משמאל):
λ הוא ע"ע של A אמ"ם יש $v \neq 0$ ו"ע של λ המקיים $Av = \lambda v$ אמ"ם $(A - \lambda I)v = 0$ אמ"ם יש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית המיוצגת ע"י $A - \lambda I$ אמ"ם $A - \lambda I$ לא הפיכה.