שאלות לתרגול נוסף - פתרונות

1. תהי $K \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה שהסופרימום שלה הוא S.

(א) הוכיחו כי קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \frac{1}{10} < x \leq S$.

פתרון: המספר S הוא הסופרימום של הקבוצה K ובפרט חסם מלעיל של K, ז"א לכל $x \in K$ מתקיים $x \leq S$. נניח בשלילה שלא קיים $x \in K$ המקיים $S - \frac{1}{10} < x \leq S$. אז לכל $x \in K$ מתקיים $x \leq S - \frac{1}{10}$. אבל אז נקבל ש־$S - \frac{1}{10}$ הוא חסם מלעיל של K שקטן יותר מהסופרימום S וזו סתירה.

(ב) הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \varepsilon < x \leq S$.

פתרון: בהינתן $\varepsilon > 0$, חזרו על ההוכחה מסעיף (א) כאשר $\frac{1}{10}$ מוחלף ב־ε.

2. יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות המקיימות $a_n + b_n \to a + b$ וגם $a_n - b_n \to a - b$. הוכיחו כי $a_n \to a$ וכן $b_n \to b$.

פתרון: לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$a_n = \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} \to \frac{(a + b) + (a - b)}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$b_n = \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2} \to \frac{(a + b) - (a - b)}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

3. עבור $x \in \mathbb{R}$, **הערך השלם** של x (מסומן $[x]$) מוגדר להיות המספר השלם m המקיים $m \leq x < m + 1$.
לדוגמא: $[3.5] = 3,\ [7.1] = 7,\ [0] = 0,\ [-0.5] = -1$.

(א) הוכיחו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x - 1 < [x] \leq x$.

פתרון: עפ"י הגדרת הערך השלם מתקיים $[x] \leq x < [x] + 1$, ואם מבודדים את $[x]$ מקבלים $x - 1 < [x] \leq x$ כרצוי.

(ב) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{[\frac{2}{3}n]}{n}$ מקיימת $a_n \to \dfrac{2}{3}$.

פתרון: לפי סעיף (א), לכל n טבעי מתקיים $\frac{2}{3}n - 1 < [\frac{2}{3}n] \leq \frac{2}{3}n$ ואם נחלק ב־n:

$\dfrac{\frac{2}{3}n - 1}{n} < \dfrac{[\frac{2}{3}n]}{n} \leq \dfrac{\frac{2}{3}n}{n}$, כלומר $\frac{2}{3} - \frac{1}{n} < a_n \leq \frac{2}{3}$. כעת מכלל הסנדוויץ' נובע כי $a_n \to \dfrac{2}{3}$.

4. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n] = [L]$.

פתרון: ניקח למשל $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, ולכל n מתקיים $[a_n] = [1 - \frac{1}{n}] = 0$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n] = 0 \neq [1] = 1$.

5. הוכיחו שלסדרה $a_n = \dfrac{1}{2} sin(2^n)$ יש תת־סדרה מתכנסת במובן הצר (כלומר לגבול סופי).

פתרון: לכל n טבעי $|a_n| = \frac{1}{2}|sin(2^n)| \leq \frac{1}{2}$, כלומר הסדרה $\{a_n\}$ חסומה. ממשפט בולצאנו־ויירשטראס, יש לה תת־סדרה המתכנסת במובן הצר.

6. כזכור, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. השתמשו בעובדה זו כדי להוכיח $\lim_{n\to\infty}(1+n^2)^{\frac{1}{1+n^2}}=1$.
פתרון: נסמן $a_n=\sqrt[n]{n}$. אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$. לפי משפט, כל תת־סדרה של $\{a_n\}$ מתכנסת אף היא ל־1, בפרט תת־הסדרה $b_n=a_{1+n^2}$. לכן

$$\lim_{n\to\infty}(1+n^2)^{\frac{1}{1+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[1+n^2]{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}a_{1+n^2}=1$$

7. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

(א) הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=1$.
פתרון: למשל $a_n=1+\frac{1}{n}$ מקיימת $a_n\to 1$ אבל $(a_n)^n\to e$.

(ב) תנו דוגמא לסדרה $\{a_n\}$ כזו עבורה $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=e^3$.
פתרון: $a_n=1+\frac{3}{n}$ מקיימת $a_n\to 1$ וגם $(a_n)^n\to e^3$ (מקרה פרטי של המשפט $(1+\frac{x}{n})^n\to e^x$ לכל x קבוע).

8. הוכיחו: אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$ אז $\lim_{x\to\infty}f(2x)=L$.
פתרון: ניעזר בהגדרת הגבול של קושי: כדי להוכיח $\lim_{x\to\infty}f(2x)=L$ צ"ל שבהינתן $\varepsilon>0$ קיים $a>0$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $|f(2x)-L|<\varepsilon$ ("אם x מספיק גדול, הפונקציה קרובה ל־L"). נתון כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, לכן עבור אותו ε קיים $a'>0$ כך שלכל $x>a'$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. ניקח $a=a'$ ונקבל שלכל $x>a$ ודאי גם $2x>a'$ ולכן $|f(2x)-L|<\varepsilon$, כדרוש.

9. חשבו את הגבול של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & x\geq 2\\ \dfrac{x}{2} & x<2\end{cases}$$

בנקודה $x=2$.
פתרון: הפונקציה מוגדרת אחרת עבור $x\geq 2$ ועבור $x<2$, לכן נחשב את הגבולות החד־צדדיים ב־$x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=2^2-3=1$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2}=\frac{2}{2}=1$$

הגבולות החד־צדדיים קיימים, סופיים ושווים, לכן לפי משפט הגבול הרגיל קיים ושווה להם: $\lim_{x\to 2}f(x)=1$.

10. עבור אילו ערכי a הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}ax+3 & x>3\\ x^2 & x\leq 3\end{cases}$$

רציפה בנקודה $x=3$?
פתרון: $f(x)$ רציפה בנקודה $x=3$ אם ורק אם $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$. $f(3)=3^2=9$, לכן צריך שהגבולות החד־צדדיים יהיו קיימים ושווים 9:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}x^2=3^2=9$$
$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(ax+3)=3a+3$$

ולכן צריך להתקיים $3a+3=9$, ז"א $3a=6$ ולכן $\boldsymbol{a=2}$.

11. היעזרו בזהות הטריגונומטרית $cos(2\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha)$ על מנת לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$.
פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

(אמתו זאת בעזרת כלל לופיטל).

12. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבת $x=0$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f רציפה ב־$x=0$, אז גם f^2 רציפה ב־$x=0$.
נכון. הוכחה: אם f רציפה ב־$x=0$ אז גם $f^2 = f\cdot f$ רציפה שם כמכפלה של פונקציות רציפות.

(ב) אם f^2 רציפה ב־$x=0$, אז f רציפה ב־$x=0$.
לא נכון. דוגמא נגדית: עבור הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -1 & x<0\end{cases}$ מתקיים $f^2(x)=1$ פונקציה קבועה שרציפה בכל נקודה, אבל $f(x)$ לא רציפה ב־$x=0$ (אי־רציפות מסוג ראשון).

13. הפונקציות f ו־g מוגדרות בסביבת הנקודה x_0, f רציפה ב־x_0 ו־g אינה רציפה ב־x_0.

(א) הוכיחו שאם $f(x_0)=0$ ו־g חסומה בסביבת x_0, אז $f\cdot g$ רציפה ב־x_0.
פתרון: צ"ל ש־$f\cdot g$ רציפה ב־x_0, כלומר צ"ל ש־

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = 0\cdot g(x_0) = 0$$

נתון ש־f רציפה ב־x_0, לכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$. בנוסף, $g(x)$ חסומה בסביבת x_0, לכן לפי משפט $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$ (כמכפלה של פונקציה חסומה בפונקציה השואפת ל־0), כדרוש.

(ב) הוכיחו שאם $f\cdot g$ רציפה ב־x_0, אז $f(x_0)=0$.
פתרון: נניח בשלילה ש־$f(x_0)\neq 0$. אז $g=\frac{f\cdot g}{f}$ מוגדרת ורציפה ב־x_0 כמנה של הפונקציות $f\cdot g$ ו־f שרציפות ב־x_0, בסתירה לנתון ש־g לא רציפה ב־x_0.

14. הוכיחו שלפונקציה $f(x)=[x]$ (הערך שלם של x) יש נקודת אי־רציפות מסוג ראשון בנקודה $x=1$ (כלומר הגבולות החד־צדדיים בנקודה זו קיימים וסופיים, אך שונים).
פתרון: לכל $1\leq x<2$ מתקיים $[x]=1$, ולכן

$$\lim_{x\to 1^+}[x] = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

בדומה, לכל $0\leq x<1$ מתקיים $[x]=0$, ולכן

$$\lim_{x\to 1^-}[x] = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$$

הגבולות החד־צדדיים קיימים וסופיים אך שונים, ולכן $x=1$ אכן אי־רציפות מסוג ראשון. הערה: באופן דומה אפשר להראות שלפונ' יש אי־רציפות מסוג ראשון בכל $x\in\mathbb{Z}$ (ציירו את הגרף שלה, "מדרגות" עם "קפיצה" בכל מס' שלם).

15. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל נקודה ומקיימת $|f(x)|\leq 7$ לכל x. הוכיחו כי למשוואה $2x+f(x)=3$ קיים פתרון.
פתרון: הפונקציה $g(x)=2x+f(x)-3$ רציפה בכל נקודה (כסכום והפרש של פונ' רציפות). צ"ל שיש x_0

כך ש־$g(x_0)=0$ (ואז x_0 הוא פתרון למשוואה). נתון שלכל x מתקיים $|f(x)|\le 7$, ז"א $-7\le f(x)\le 7$.
לכן למשל

$$g(6)=2\cdot 6+f(6)-3=f(6)+9>0$$
$$g(-6)=2\cdot(-6)+f(-6)-3=f(-6)-15<0$$

ממשפט ערך הביניים נקבל שקיים $x_0\in(-6,6)$ כך ש־$g(x_0)=0$, כרצוי.

16. הוכיחו שאם $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיימת נקודה $x_0\in(0,10)$ כך ש־$f(x_0)=\dfrac{f(1)+f(8)}{2}$.

פתרון: אם $f(1)=f(8)$ אז $x_0=1$ מקיים את הדרוש. אחרת, $\frac{f(1)+f(8)}{2}$ הוא הממוצע של הערכים (השונים) $f(1)$ ו־$f(8)$ ולכן ודאי נמצא ביניהם. כיוון ש־f רציפה בקטע $[1,8]$, ממשפט ערך הביניים יש $x_0\in(1,8)$ שבו $f(x_0)=\frac{f(1)+f(8)}{2}$ כדרוש.

17. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\dfrac{sinx}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$. רמז: הרחיבו את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$.

פתרון: $f(x)$ מוגדרת ורציפה בכל $x\neq 0$. הנקודה $x=0$ היא אי־רציפות סליקה, כיוון ש־$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x}=1$. לכן אפשר להגדיר $\tilde{f}(x):=\begin{cases}f(x) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$. כעת, $\tilde{f}$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$, ולפי משפט קנטור רציפה בו במידה שווה. בפרט, $\tilde{f}$ רציפה במידה שווה ב־$(0,1)$, וכיוון ששם היא מתלכדת עם f נובע ש־f רציפה במידה שווה ב־$(0,1)$.

18. הוכיחו לפי ההגדרה שהפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ אינה גזירה מימין ב־$x=0$.

פתרון: נראה שהגבול המגדיר את הנגזרת הימנית ב־$x=0$, $f'_+(0)$, לא קיים במובן הצר:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=\infty$$

קיבלנו שהגבול הוא ∞ ולכן f לא גזירה מימין ב־$x=0$.

19. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=|x|$ רציפה ב־$x=0$ אך אינה גזירה שם.

פתרון: $f(x)$ רציפה ב־$x=0$, שכן:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$$

אבל $f(x)$ לא גזירה ב־$x=0$ כי הנגזרות החד־צדדיות שם שונות:

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\mathbf{1}$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-\mathbf{1}$$

20. חשבו את הגבול $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+h}-1}{h}$ (רמז: מה הקשר בין גבול זה לבין הפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{x}$?)

פתרון: זהו בדיוק הגבול שמגדיר את <u>הנגזרת</u> של הפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{x}$ בנקודה $x=1$ (כאשר h בתפקיד Δx). לכל $x\neq 0$ אפשר לגזור לפי כללי הגזירה ולקבל $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. לכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+h}-1}{h}=f'(1)=\frac{1}{5\sqrt[5]{1^4}}=\frac{1}{5}$$

לחלופין, אפשר לפתור בעזרת כלל לופיטל.