מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 8 (פתרון)

1. אפשר להניח ש- $M \neq \emptyset$ כי אחרת: $x^* \in M \Rightarrow f(x^*) = x^*$
מזה מיד נובע ש- $F_n \neq \emptyset$ (אינדוקציה)

<u>א'</u> אינדוקציה. בסיס: $F_1 \subseteq F_0 = M$. צעד:

$$F_k \subseteq F_{k-1} \Rightarrow F_{k+1} = f(F_k) \subseteq f(F_{k-1}) = F_k$$

<u>ב'</u> F_n קומפקטית כתמונה של קומפקטית בהעתקה רציפה (אינדוקציה). ולכן F_n סגורה כתת-קבוצה קומפקטית במרחב מטרי.

<u>ג'</u> הוכיחו ש- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

מ-א' נובע ש- $\bigcap_{1\le i\le K} F_{n_i} = F_m$ כאשר $m = \max\limits_{1\le i\le K} n_i$,
ולכן $\bigcap_{1\le i\le K} F_{n_i} \neq \emptyset$ לכל קבוצה ספית $\{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ של אינדקסים. מזה, מ-ב' ומקריטריון שהוכח בכיתה, נובע ש- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

<u>ד'</u> נניח ש- $x_n, y_n \in F_n$. אזי קיימים x_{n-1}, y_{n-1} כך ש- $f(x_{n-1}) = x_n$ ו- $f(y_{n-1}) = y_n$. אזי

$$d(x_n, y_n) \le a \cdot d(x_{n-1}, y_{n-1}) \le a \cdot diam(F_{n-1})$$

$$diam(F_n) = \sup_{x_n, y_n \in F_n} d(x_n, y_n) \le a \cdot diam(F_{n-1})$$

<u>ה'</u> מ-ד': $diam(F_n) \le a^n \cdot diam(M) \Leftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$$

<u>ו'</u> מ-ה' נובע ש- $diam(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = 0$ ומ ו-ג' נובע שקיימת $x^* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ואינה קיימת עוד אחת כזאת.

<u>ז'</u> $f(x^*) \in f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \{x^*\}$.

2. <u>א'</u> במקום τ נתבונן באוסף σ של משלימים לאיברי τ <u>בקבוצה X</u> ונוכיח שאוסף קבוצות σ בעל שלושת התכנות הבסיסיות של קבוצות סגורות במרחב טופולוגי.
זה יוכיח ש- τ טופuלוגיה.
כלומר, יהי:

$$\sigma := \{F \cup \{p\} \,|F \subseteq \mathbb{R}^n \wedge F \text{ } is \text{ } closed \text{ } in \text{ } \mathbb{R}^n\} \cup \{\, G \subseteq \mathbb{R}^n|\, G \text{ } is \text{ } compact \text{ } in \text{ } \mathbb{R}^n\}$$

(i) $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\} \ni \sigma$, $\emptyset$ - קומפקטית ושייכת ל-σ .

(ii) נתבונן בחיתוך כלשהו של איברי σ. אם הם כולם מסוג $F \cup \{p\}$ אז גם החיתוך – מאותו סוג.
אחרת בינהם ישנו איבר אחד G_0 שהוא קומפקטי ב-$\mathbb{R}^n$. אזי כל החיתוך הוא תת-קבוצה סגורה של G_0 ולכן קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$.

(iii) נתבונן באיחוד סופי של איברי σ. אם הם כולם מסוג "$G \subseteq \mathbb{R}^n|\, G \text{ } is \text{ } compact \text{ } in \text{ } \mathbb{R}^n$" אז גם האיחוד – מאותו סוג.(הוכח בתרגול)
אחרת בינהם ישנו איבר אחד או יותר מסוג $F \cup \{p\}$ כך ש-F סגורה ב-$\mathbb{R}^n$. אזי כל האיחוד הסופי הוא תת-קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$ המאוחדת עם הנקודון $\{p\}$ כי כל קומפקט ב-$\mathbb{R}^n$ סגור ואיחוד סופי של קבוצות סגורות - סגור.

<u>ב'</u> הוכיחו ש- (X, τ) מרחב טופולוגי קומפקטי.
נקח אוסף $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות סגורות ב-X כך שכל חיתוח סופי שלחן אינו ריק ונוכיח שהחיתוח של כל הקבוצות H_α גם אינו ריק (זה מספיק: הוכח בכיתה).

נניח –בדרך השלילה – ש-$\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha = \emptyset$. אזי קיימת $\beta \in I$
כך ש- H_β מסוג $G = H_\beta$ כאשר G קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$.
(אחרת: $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha \supseteq \{p\} \neq \emptyset$).
נסמן $F_\alpha \coloneqq G \cap H_\alpha$. ברור ש-$F_\alpha$ סגרות ב-G . אבל כל חיתוך סופי של F_α הוא גם חיתוך סופי של H_α ! ולכן הוא לא ריק.
אזי , בגלל קומפקטיות של G, $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$. אזי, כיוון ש-$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ – סתירה.

3. יהיו (X,τ) ו-(X,τ') מרחבים טופולוגיים, (X,τ) – מרחב האוסדורף ו- $\tau \subset \tau'$. יהיו $p \neq q \in X$. אזי לפי הגדרת האוסדורף קיימות שתי סביבות $U_p, U_q \in \tau$ כך ש- $p \in U_p, q \in U_q$ ו- $U_p \cap U_q = \emptyset$. אבל כיוון ש-$\tau \subset \tau'$, מתקיים גם: $U_p, U_q \in \tau'$ וזה מוכיח ש-τ' גם טופולוגית האוסדורף.

4. יהי תת-מרחב סופי $K = \{x_1, \dots, x_n\}$. אם $n = 1$ הכל חוכח. יהי $n > 1$. נוכיח ש - $\{x_i\}$ קבוצה סגורה בטופולוגיה המושרת. ידוע מההרצאות:
   - תת-מרחב האוסדורף הוא בעצמו האוסדורף,
   - כל נקודון סגור במרחב האוסדורף.

   לכן כל נקודון $\{x_i\}$ סגור בתת-מרחב K. אזי כל תת-קבוצה לא ריקה ב-K סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות. הקבוצה הריקה גם היא סגורה. אזי כל תת-קבוצות ב-K סגורות. לכן כל תת-קבוצות ב-K פתוחות, ואז הטופולוגיה ב-K דיסקרטית ,מש"ל.

5. הערה-תזכורת. הגדרת גבול של סדרה במרחב טופולוגי מתלכד מילולית עם הגדירת גבול של סדרה במרחב מטרי בנוסח של סביבות פתוחות:

הגדרה. יהי X מרחב טופולוגי ו- $x_n \in X$ סדרה. נקודה $a \in X$ נקראת גבול של סדרה x_n אם לכל סביבה U_a של a קיים מספר טבעי N כך ש-$x_n \in U_a$ לכל $n \geq N$.

הוכחה. יהי x_n – סדרה במרחב האוסדורף X

ונניח בדרך השלילה ש- $x_n \to a,\ x_n \to b$, $a \neq b \in X$.

אזי לפי האוסדורף קיימות סביבות לא נחתכות $a \in U$ ו- $b \in V$.

אזי קיימים מספרים טבעים N_1, N_2 כך ש- $x_n \in U$ אם $n \geq N_1$ ו-$x_n \in V$ אם $n \geq N_2$. מזה נובע ש- $x_n \in U \cap V$ אם $n \geq max\{N_1, N_2\}$. אבל זאת סתירה כי $U \cap V = \emptyset$.

6. נסמן ב-(*) את התנאי

$$\bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

$\Leftarrow$יהי X מרחב האוסדורף ו- $x \in X$. ההכלה $\supseteq$ ב-(*) ברורה. נוכיח את ההכלה $\subseteq$. יהי $y \in X$ ולא שייך לאגף ימין, ז"א, $y \neq x$. לפי האוסדורף קיימות סביבות $x \in U_x, y \in V_y$ כך ש- $U_x \cap V_y = \emptyset$. אם נקח $F := V_y^c$, אז $y \notin F$ אבל F אחד מאברי החיתוך ב-(*) ולכן y לא שייך לחיתוך, ז"א y לא שייך לאגף שמאל.

$\Rightarrow$. נניח שהשוויון (*) מתקיים. אזי אם $y \neq x$, y לא שייך לחיתוך, ז"א, קיימת F סגורה כך ש- $x \in F^\circ$ ו- $y \notin F$.

אם נקח $U_x := F^\circ$ ו- $V_y := F^c$ אז נקיים את תנאי האוסדורף.

7. יהיו $x \neq y \in X$ אזי לפי ההנחה קיים מרחב האוסדורף Y ופונקציה רציפה f כך ש- $f(x) \neq f(y)$. לכן קיימות שתי סבחבות U,V ב-Y כך ש- $f(x) \in U$ ו- $f(y) \in V$ ו- $U \cap V = \emptyset$. אזי $x \in f^{-1}(U)$ ו- $y \in f^{-1}(V)$ ו- $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. חוץ מזה $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ פתוחות כיוון ש- f רציפה.לכן X מרחב האוסדורף, מש"ל.

8. נוכיח ש- $\{x \in X | f(x) = g(x)\}^c$ קבוצה פתוחה.
יהי $x_0 \in X$ כל ש- $f(x_0) \neq g(x_0)$. אזי מאקסיומת האוסדורף: קיימת סביבות $f(x_0) \in U$ ו- $g(x_0) \in V$
כך ש- $U \cap V = \emptyset$. (*)
מרציפות של הפונקציות בנקודה x_0: קיימות סביבות W_1, W_2 x_0 כך ש- $f(W_1) \subseteq U$ ו- $f(W_2) \subseteq V$. אם נקח $W = W_1 \cap W_2$ אזי $f(W) \subseteq U$ ו- $f(W) \subseteq V$. לכן – בגלל (*) – לכל נקודה $z \in W$ מתקיים $f(z) \neq g(z)$. ז"א,
$$x_0 \in W \subseteq \{x \in X | f(x) = g(x)\}^c$$
ולכן $\{x \in X | f(x) = g(x)\}^c$ קבוצה פתוחה , מש"ל.