בוחן בטופולוגיה

21.05.2017

מתרגלים: אלעד אטיא, תמר בר און, שירה גילת.
יש לענות על כל השאלות.
בהצלחה:)

1. תהי X קבוצת כל הסדרות שרכיביהן באים מ: $\{0,1,2,...\}$. נגדיר על X את המטריקה הבאה: (אין צורך להוכיח שזו מטריקה)
$d((x_n),(y_n)) = 0$ אם שתי הסדרות שוות, ואחרת $d((x_n),(y_n)) = \frac{1}{m}$, עבור $m=\min\{i : x_i \neq y_i\}$. כלומר, האינדקס הראשון שבו הן שונות.

(א) (15 נקודות) הוכיחו שקבוצת הסדרות שמתחילות ב$0,5,6$ או ב $1,2,9,8$ היא פתוחה.
פתרון:
קבוצת הסדרות שמתחילות ב$0,5,6$ היא כדור פתוח. הסבר: נקח סדרה כזאת, למשל, $x=(0,5,6,0,0,0,...)$. אז קבוצות הסדרות שמתחיות ב$0,5,6$ שווה בדיוק ל$B(x,\frac{1}{3})$. הוכחה: $y\in B(x,\frac{1}{3}) \iff d(y,x)<\frac{1}{3} \iff \min\{i : x_i\neq y_i\} > 3$. כלומר, 3 האיברים הראשונים של y שווים ל3 האיברים הראשונים של x.

באותו אופן ניתן להראות גם שקבוצת הסדרות שמתחילות ב$1,2,9,8$ היא כדור פתוח. לסיכום, הקבוצה המבוקשת היא איחוד של כדורים פתוחים ולכן פתוחה.

(ב) (15 נקודות) מצאו את הסגור של קבוצת הסדרות הקבועות לבסוף על 2.
פתרון:
$cl(A)=X$. הוכחה: תהי סדרה $x\in X$. אנחנו רוצים למצוא סדרה של סדרות קבועות לבסוף על 2 שמתכנסת אליה. נגדיר x_n להיות סדרה שמזדהה עם x עד המקום הn, ואחרי זה שווה ל2. טענה: $x_n \to x$. הסבר: $d(x,x_n)\leq \frac{1}{n+1}\to 0$.

(ג) (15 נקודות) הוכיחו/ הפריכו: פונקציית ההטלה על הרכיב הi $\Pi_i : X\to\mathbb{N}$ היא פונקציה רציפה. (כאשר $\mathbb{N}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית.)
פתרון:
הוכחה: תהי x סדרה בX. נניח ש $\Pi_i(x)=n$. כלומר, הרכיב הiי של x הוא n. $\{n\}$ היא סביבה פתוחה של n (בגלל שאנחנו בטופולוגיה הדיסקרטית). מספיק למצוא סביבה פתוחה של x שהולכת לתוך $\{n\}$. ובכן, אם נקח את $B(x,\frac{1}{i+1})$, זה יעשה את העבודה. זהו כדור פתוח סביב x, ובנוסף, אם

$y \in B(x, \frac{1}{i+1})$ אז $x_i = y_i$, כי $i+1$ זה האינדקס הראשון שבו הן שונות. כלומר, $\Pi_i(y) \in \{n\}$.

2. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$.
נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.

   (א) (15 נקודות) הוכיחו ש-τ הוא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.
   פתרון:

   נוכיחו שזאת טופולגיה: מההגדרה היא מכילה את הקבוצה הריקה ואת כל המרחב.

   איחוד כלשהו: נניח ש-O_i כולן קבוצות, ונרצה להוכיח ש $\bigcup O_i$ פתוחה. אם יש i כך ש-$O_i = \mathbb{Z}$, אז סיימנו. אחרת, לכל i, $O_i = O_n$ עבור איזשהו n. נקח $m = \min\{n : O_i = O_n\}$, כלומר, נקח את ה-$n$ הקטן מבינהם, אז $\bigcup O_i = O_m$.

   חיתוך סופי: אם אחת הקבוצות היא הקבוצה הריקה, טריוויאלי. אחרת, נסתכל על $O_n \cap O_m$. נניח בה"כ ש $m < n$, אז $O_m \cap O_n = O_n$. (נשים לב שחיתוך עם $\mathbb{Z}$ לא משנה כלום).

   (ב) (15 נקודות) הוכיחו ש-τ אינו מטריזבילי.
   פתרון:

   נראה שהטופולוגיה אינה מטריזבילית. הנקודון $\{1\}$ למשל אינו סגור, כי $\{1\}^c$ לא פתוח. וידוע שבמרחב מטרי כל נקודון הוא פתוח.

   (ג) (15 נקודות) הוכיחו שלכל סדרה מתכנסת במרחב הזה יש אינסוף גבולות.
   פתרון:

   נניח ש-$x_n \to x$. טענה: לכל $y < x$, $x_n \to y$. הוכחה: תהי O קבוצה פתוחה כך ש $y \in O$. לפי הגדרת הטופולוגיה, אם מספר נמצא בקבוצה פתוחה, אז גם כל המספרים שאחריו נמצאים בה. לכן $x \in O$. כלומר, O סביבה

3. (25 נקודות) תהיינה d, ρ מטריקות שקולות על קבוצה X. נניח שהמרחב (X,d)שלם.
הוכיחו או הפריכו: המרחב (X, ρ) שלם.
<u>פתרון:</u>

הפרכה.

תהי $X = \mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו-ρ המטריקה המוגדרת על ידי: $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$.

הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי: $f(x) = e^x$ היא חח"ע ולכן ρ היא אכן מטריקה.

נראה שהמטריקות שקולות. תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n \xrightarrow{d} x$, ונראה שגם $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

אם כן, $d(x_n, x) = |x_n - x| \longrightarrow 0$, ומכיוון שהפונקציה $f(x) = e^x$ רציפה גם: $\rho(x_n, x) = |e^{x_n} - e^x| \longrightarrow 0$, ולכן $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

לצד שני, תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n \xrightarrow{\rho} x$, ונראה שגם $x_n \xrightarrow{d} x$. נשתמש בפונקציה הרציפה $f(x) = \ln x$ באופן דומה.

אנו יודעים שהמרחב $(\mathbb{R},d)$שלם.

נראה שהמרחב $(\mathbb{R},\rho)$ אינו שלם. נמצא סדרת קושי שאינה מתכנסת.

נתבונן בסדרה $\left\{\ln\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. יהיו $n>m$ טבעיים. מתקיים:

$$\rho\left(\ln\frac{1}{n},\ln\frac{1}{m}\right)=\left|e^{\ln\frac{1}{n}}-e^{\ln\frac{1}{m}}\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{m}$$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא n_0 עבורו לכל $m,n>n_0$ יתקיים $\rho\left(\ln\frac{1}{n},\ln\frac{1}{m}\right)<\varepsilon$ (אם ממש מתעקשים, $n_0=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$) ולכן זו סדרת קושי.

מצד שני, הסדרה $\left\{\ln\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת במרחב $(\mathbb{R},d)$ ולכן גם לא מתכנסת במרחב $(\mathbb{R},\rho)$.