בס"ד תשרי תשע"א

מבחן באלגברה לינארית 1 88-112.

סמסטר קיץ תש"ע. מועד ב.

מרצים: ד"ר אלי בגנו, ד"ר אפי כהן.

חומר עזר: ראש פתוח.

משך הבחינה: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון שלש שאלות, מתוכן יש לענות על שתים **בדיוק** באופן מפורט ומדוייק. כל תשובה נכונה ומפורטת מזכה ב 25 נקודות.

בחלק השני 6 שאלות, מתוכן יש לענות על 5 **בדיוק בטבלה בעמוד זה**, לפי ההוראות שבגוף השאלה. כל שאלה בחלק זה מזכה ב 10 נקודות לכל היותר.

שימו לב: המחברות משמשות לטיוטא בלבד, הן לא יבדקו.

F הוא שדה כלשהוא אם לא נאמר אחרת .

בכל אחת מהשאלות שבחרת מתוך 4-9 (פרט לשאלה 7) עליך לסמן כן/ לא בטבלה זו ליד כל סעיף בהתאם לנכונות הטענה.

שאלה		ציון
1	בדף השאלה	
2	בדף השאלה	
3	בדף השאלה	
4	א ב ג ד	
5	א ב ג ד	
6	א ב ג ד	
7		
8	א ב ג ד	
9	א ב	
ס"ה		

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 1

א. הוכח שאם U תת מרחב של מרחב ווקטורי נוצר סופית V מעל שדה F כך ש $\dim V = \dim U$ אז $V = U$.

הוכחה:

נתון $U \subseteq V$, ונניח $\dim U = \dim V = n$. נניח בשלילה ש $U \neq V$ לכן קיים $v \in V$ כך ש $v \notin U$. ניקח בסיס B ל U ונסמן $B = \{u_1,...,u_n\}$ (שימו לב לשימוש בהנחה שהמימדים שווים). $v \notin span(B) = U$.

נוכיח ש $\{u_1,...,u_n,v\}$ בת"ל. ניקח צ"ל שמתאפס $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} v = 0$. נניח בשלילה ש $\alpha_{n+1} \neq 0$ אזי נעביר אגף ונחלק בו לקבל $v = -\dfrac{\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_{n+1}}$ בסתירה לכך ש $v \notin span(B)$. ולכן $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$ ולכן גם שאר הסקלרים $\alpha_1,...,\alpha_n$ שווים לאפס כי B בת"ל. לכן סה"כ הצ"ל היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי ולכן הקבוצה בת"ל.

לכן $\{u_1,...,u_n,v\}$ קבוצה בת"ל המוכלת ב V עם $n+1$ איברים וזו סתירה מכיוון שהמימד של V הוא n (בקבוצה בת"ל יש לכל היותר איברים כגודל המימד).

ב. יהיו U,W תת מרחבים של מרחב וקטורי נוצר סופית V מעל שדה F.
נניח ש $V = U \oplus W$. יהיו B ו C בסיסים עבור U ו W בהתאמה. הוכח ש $B \cup C$ בסיס של V.

הוכחה:

נתון ש $V = U \oplus W$ ולכן לפי הגדרה $W \cap U = \{0\}$ ולכן $\dim(W \cap U) = 0$. לכן לפי משפט המימדים $\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) = \dim W + \dim U$. ברור ש $B \cap C = \phi$ (הרי אפס לא שייך לאף בסיס) ולכן ברור ש $\#(B \cup C) = (\# B) + (\# C) = \dim U + \dim W = \dim(U+W) = \dim V$. לכן לפי השלישי חינם מספיק רק להוכיח ש $B \cup C$ בת"ל על מנת להראות שהיא בסיס.

נסמן $B = \{u_1,...,u_k\}, C = \{w_1,...,w_m\}$. ניקח צ"ל של $B \cup C$ שמתאפס $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m = 0$ נעביר אגף לקבל $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = -\beta_1 w_1 - ... - \beta_m w_m$ אבל האיבר היחיד שנמצא גם ב U וגם ב W הוא אפס ולכן $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = -\beta_1 w_1 - ... - \beta_m w_m = 0$ אבל B,C בסיסים ולכן הצ"ל היחידים שלהם שמתאפסים הם הטריוויאלים ולכן כל הסקלרים מתאפסים, ולכן הצ"ל היחיד של $B \cup C$ שמתאפס הוא הטריוויאלי.

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 2

א. הראה כי אם $A\in M_n(F)$ הפיכה אז לכל מטריצה $B\in M_n(F)$ המטריצות AB ו BA דומות.

הוכחה:

נסמן $P=A$ ולכן $BA=A^{-1}ABA=P^{-1}(AB)P$ מ.ש.ל.

ב. נגדיר תת קבוצה $W\subseteq \Re^3$ באופן הבא:

$$W=\left\{(a,b,c)\in\Re^3 : rank\begin{pmatrix} a & b & c\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=2\right\}$$

הראו כי W הוא מרחב וקטורי ומצאו בסיס עבורו. מצאו (תוך הוכחה) מהו המימד של W?

פתרון:

ברור ש2 השורות התחתונות של המטריצה בת"ל ולכן דרגת המטריצה, שבפרט שווה למימד מרחב השורות, היא לפחות 2. היא תהיי בדיוק 2 אם"ם השורה העליונה הינה צ"ל של שתי האחרות (אם היא לא, מרחב השורות יהיה ממימד 3). כלומר $W=span\{(2,1,3),(3,1,2)\}$ ומכיוון שזו קבוצה פורשת ובת"ל היא בסיס ל W והמימד של W הינו 2.

ג. לכל $a,b\in\Re$, נגדיר את המטריצות $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & b\\ 2 & b & 2\\ b & 2 & 2\end{pmatrix}$.

נסמן ב $W(a)$ את מרחב העמודות של המטריצה A, ויהי $U(b):=\{v\in\Re^3 : Bv=0\}$.

מצא לכל הפרמטרים a,b בסיס ומימד של המרחבים $W(a)\cap U(b), W(a)+U(b)$.

הראה, לכל הפרמטרים a,b, ע"י חישוב המימדים של $W(a)$ ושל $U(b)$, כי משפט המימדים מתקיים במקרה זה.

פתרון:

מכיוון ש A סימטרית, מרחב העמודות שלה שווה למרחב השורות שלה. נדרג על מנת למצוא לו בסיס.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-aR_1]{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\end{pmatrix}$$

לכן עבור $a \neq -2,1$ $W(a)=\mathbb{R}^3$ ולכן $W(a)+U(b)=\mathbb{R}^3$, בסיס ניתן לקחת את הסטנטרדי והמימד הינו 3.

כעת נחשב את $U(b)$ שהוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & b & 0 \\ 2 & b & 2 & 0 \\ b & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{\frac{1}{2}R_1 \; \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 1 & \frac{b}{2} & 1 & 0 \\ \frac{b}{2} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-\frac{b}{2}R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2}-1 & 1-\frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1-\frac{b}{2} & 1-\frac{b^2}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2}-1 & 1-\frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4} & 0 \end{array}\right)$$

לכן עבור $b \neq -4,2$ הפתרון היחיד למערכת הזו הינו אפס, ולכן $U(b)=\{0\}$ ולכן $W(a) \cap U(b)=\{0\}$, מימדו אפס, והבסיס שלו הוא הקבוצה הריקה.

נותר לבדוק את המקרים שלא בדקנו.

עבור $a=1$ קל לראות ש $W(1)=span\{(1,1,1)\}$

עבור $a=-2$ נחזור למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

רואים ש $W(2)=span\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

עבור $b=2$ רואים

ש $U(2)=\{(-t-s,t,s)\}=span\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}=span\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$

עבור $b=-4$ נחזור למטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

ו $U(-4)=\{(t,t,t)\}=span\{(1,1,1)\}$

עבור $a=1$, $b=-4$ קל לראות ש $span\{(1,1,1)\}=W(a)+U(a)=W(a)\cap U(a)$ עם מימד אחד ובסיס $\{(1,1,1)\}$.

עבור $a=1$, $b=2$ החיבור הוא $W(a)+U(b)=span\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ נשים בשורות מטריצה ונדרג $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ ולכן $W(a)+U(b)=\mathbb{R}^3$ עם בסיס סטנדרטי ומימד 3.

נוכיח כי החיתוך הינו $W(a)\cap U(b)=\{0\}$. נניח $(t,t,t)=(r+s,-r,-s)$ לכן נובע בקלות ש $t=r=s=0$. הבסיס הינו הקבוצה הריקה והמימד הינו אפס.

עבור $a=-2$, $b=2$ קל לראות ש $W(a)+U(a)=W(a)\cap U(a)=span\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ כאשר הבסיס הינו $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ והמימד כמובן הוא 2

עבור $a=-2$, $b=-4$ $W(a)+U(b)=span\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ כמו קודם, וכן $W(a)\cap U(b)=\{0\}$ כמו קודם.

סה"כ סיכום

ערכי הפרמטרים	$\dim W(a)$	$\dim U(b)$	$\dim(W(a)+U(b))$	$\dim(W(a)\bigcap U(b))$
$a\neq -2,1$ $b\neq -4,2$	3	0	3	0
$a=1$ $b\neq -4,2$	1	0	1	0
$a=1$ $b=2$	1	2	3	0
$a=1$ $b=-4$	1	1	1	1
$a=-2$ $b\neq -4,2$	2	0	2	0
$a=-2$ $b=2$	2	2	2	2
$a=-2$ $b=-4$	2	1	3	0

וקל לראות שמשפט המימדים
$\dim(W(a)+U(b))=\dim W(a)+\dim U(b)-\dim(W(a)\cap U(b))$ אכן מתקיים בכל
שורות הטבלה.

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 3

נגדיר העתקה $T:\Re^4 \to \Re^4$ ע"י $T(x,y,z,w)=(x+y,w,0,z)$.

א. הוכח ש T העתקה לינארית.

הוכחה:

נוכיח לפי הקריטריון המקוצר. נניח $u=(x,y,z,w), w=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר, צ"ל $T(u+\alpha w)=Tu+\alpha Tw$.

ואכן

$$T(u+\alpha w)=(x+y+\alpha(a+b), w+\alpha d, 0, z+\alpha c)=(x+y,w,0,z)+\alpha(a+b,d,0,c)=Tu+\alpha Tw$$

ב. לכל $n\in N$ חשב את המטריצה של ההעתקה T^n בבסיסים הסטנדרטיים של $\Re^4$.

פתרון:

דרך ארוכה ומייגעת:

נחשב את ההעתקות $T^2(x,y,z,w)=T\circ T(x,y,z,w)=T(x+y,w,0,z)=(x+y+w,z,0,0)$

$$T^3(x,y,z,w)=T\circ T^2(x,y,z,w)=T(x+y+w,z,0,0)=(x+y+z+w,0,0,0)$$

$$T^4(x,y,z,w)=T\circ T^3(x,y,z,w)=T(x+y+z+w,0,0,0)=(x+y+z+w,0,0,0)$$ קל

להוכיח באינדוקציה ש $T^3=T^4=....=T^n$ לכל $n\ge 4$ לכן מספיק למצוא את המטריצות המייצגות של T,T^2,T^3

על מנת למצוא מטריצה מייצגת לפי הבסיסים הסטנדרטיים, צריך לחשב את התמונה של איברי הבסיס הסטנדרטי, ולשים אותם בעמודות:

$$\begin{aligned}T(1,0,0,0)&=(1,0,0,0)\\T(0,1,0,0)&=(1,0,0,0)\\T(0,0,1,0)&=(0,0,0,1)\\T(0,0,0,1)&=(0,1,0,0)\end{aligned}$$ ולכן $$[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}T^2(1,0,0,0)&=(1,0,0,0)\\T^2(0,1,0,0)&=(1,0,0,0)\\T^2(0,0,1,0)&=(0,1,0,0)\\T^2(0,0,0,1)&=(1,0,0,0)\end{aligned}$$ ולכן $$[T^2]=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$T^3(1,0,0,0)=(1,0,0,0)$
$T^3(0,1,0,0)=(1,0,0,0)$
$T^3(0,0,1,0)=(1,0,0,0)$
$T^3(0,0,0,1)=(1,0,0,0)$ ולכן $\forall n>3:\left[T^n\right]=\left[T^3\right]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

דרך פשוטה יותר:

נחשב כמו מקודם את $[T]$.

לפי משפט $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=[T^2]=[T\circ T]=[T][T]$. כמו כן מתקיים $[T^3]=[T][T][T]$ ושוב קל להראות ששאר המטריצות נשארות אותו דבר לכל $n\geq 3$.

ג. מצא את $\dim KerT$ ואת $\dim \operatorname{Im}T$.

פתרון:

$\ker T=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \mid Tv=0\right\}=\left\{(x,y,z,w) \mid (x+y,w,0,z)=0\right\}=\left\{(-t,t,0,0) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$ קל לראות שזהו מימד ממרחב 1 שכן הבסיס שלו הינו $\left\{(-1,1,0,0)\right\}$.

$$\dim \operatorname{Im}T=\dim span\left\{Te_1,Te_2,Te_3,Te_4\right\}=\dim span\left\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\right\}=3$$

ד. מצא את n הקטן ביותר עבורו מתקיים $KerT^n=KerT^{n+1}$ וחשב את המימד של $KerT^n$ עבור n זה.

פתרון:

ברור שעבור $n\geq 3$ זה מתקיים כיוון שאז $T^n=T^{n+1}$. נבדוק עבור מקרים נמוכים יותר $\dim\ker T=1$ (כמו שחישבנו),

$\dim\ker T^2=\dim\left\{(x,y,z,w) \mid (x+y+w,z,0,0)=0\right\}=\dim\left\{(-t-s,t,0,s\right\}=2$,

$\dim\ker T^3=\dim\left\{(x,y,z,w) \mid (x+y+w+z,0,0,0)=0\right\}=\dim\left\{(-t-s-r,t,s,r\right\}=3$.

ולכן ה n המינימלי הוא אכן 3 ומימד הגרעין הרצוי הוא 3.

חלק ב

שאלה 4

תהי A מטריצה. נסמן ב K את **קבוצת** השורות של A וב T את **קבוצת** העמודות של A.

נניח ש B שקולת שורות ל A (כלומר מתקבלת מ A ע"י דירוג שורות) .

נסמן ב K_1 את **קבוצת** השורות של B וב T_1 את **קבוצת** העמודות של B.

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א) $Sp(K) = Sp(K_1)$.

הוכחה:

מרחב השורות הינו המרחב הנפרש ע"י קבוצת השורות. לפי משפט מרחבי השורות של מטריצות שקולות שורה שווים. ביחד זה מה שצריך.

ב) $Sp(T) = Sp(T_1)$.

הפרכה:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. אזי $spanT = span\{(1,1)\} \neq span\{(1,0)\} = spanT_1$.

ג) $SpK = spT_1$.

הפרכה:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ד) $\dim Sp(K_1) = \dim Sp(T_1)$.

הוכחה:

מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות של מטריצה. בפרט זה נכון עבור המטריצה B.

שאלה 5

יהיו x_1, x_2 שני פתרונות של מערכת משוואות לינאריות בעלות n משוואות ו-n נעלמים מעל שדה F.

פתרון:

במילים, $Ax_1 = Ax_2 = b$ עבור A, b מסוימים כלשהם.

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. $x_1 + x_2$ אף הוא פתרון של המערכת.

הפרכה:

ניקח $b \neq 0$, לכן $A(x_1 + x_2) = b + b \neq b$ (אחרת $b = 0$ בסתירה)

ב. לכל סקלר c, גם $cx_1 + (1-c)x_2$ פתרון של המערכת.

הוכחה:

$$A(cx_1 + (1-c)x_2) = cb + (1-c)b = b$$

ג. אם $x_1 \neq x_2$ והשדה F אין סופי אז יש למערכת אין סוף פתרונות.

הוכחה:

אם יש למערכת 2 פתרונות אזי יש לה משתנה חופשי, ולכן יש לה אינסוף פתרונות מעל שדה אינסופי.

ד. אם שורות מטריצת המקדמים בלתי תלויות לינארית אז $x_1 = x_2$.

הוכחה:

שורות A בת"ל אם"ם A הפיכה (הרי מדובר במטריצה ריבועית) ולכן $x_1 = x_2 = A^{-1}b$

שאלה 6

יהי $V=M_2(\Re)$ מרחב המטריצות הריבועיות ממימד 2 מעל $\Re$.

יהי $B=\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ בסיס עבור V.

נגדיר $T:V\to V$ ע"י $T(A)=A-A^t$ (A^t היא המטריצה המשוחלפת של A).

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. סכום איברי המטריצה $[T]_B$ הוא חיובי.

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$
$$T\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$
$$T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0$$

ולכן $[T]_B=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&2&0&0\\0&-2&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$ ולכן סכום האיברים הינו 1 שהוא אכן מספר חיובי.

ב. $\dim KerT=2$.

הפרכה:

קל לראות מסעיף קודם ששלושה איברי בסיס הולכים לאפס והרביעי לא, לכן מימד הגרעין הוא בדיוק 3.

ג. T חד חד ערכית אם ורק אם T על.

הוכחה:

T אינה חח"ע מכיוון שהגרעין שלה אינו אפס. כמו כן, T אינה על. לכן התשובה נכונה. (אבל זה גם באופן כללי נכון להעתקה בין מרחבים נוצרים סופית מאותו מימד)

ד. אם $S:V\to V$ מוגדרת ע"י $S(A)=A^t-A$ אז $[S]_B=-[T]_B$.

הוכחה:

קל לראות ש $S=-T$ ולכן כל איבר בסיס נשלח למינוס מה שהוא נשלח קודם לכן.

שאלה 7

הגדר **שנים** מתוך המושגים הבאים במקום המיוחד לכך בטבלה: (כל סעיף = 5 נקודות). שימו לב: עליכם לתת את ההגדרה שניתנה בכיתה ולא משפט שהוכח, גם אם הוא שקול להגדרה.

למשל, נניח שניתנה בכיתה ההגדרה הבאה: **פרח בר נקרא "תלת כותרתי" אם מספר עלי הכותרת שלו הוא כפולה של 3.** נניח גם שיש משפט האומר (והוכח בכיתה) שפרח בר הוא תלת כותרתי אם ורק אם לידו צומח היהודי הנודד. בשאלה זו נקבל כתשובה רק את ההגדרה המקורית: פרח בר נקרא "תלת כותרתי" אם מספר עלי הכותרת שלו הוא כפולה של 3.

1) קבוצה פורשת מינימלית. (יש להגדיר גם מהי קבוצה פורשת וגם מה פירוש פורשת מינימלית).
2) מטריצה A הפיכה.
3) $\mathrm{Im}T$

שאלה 8

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

תהי $T: Z_3^{\ 3} \to Z_3^{\ 2}$ העתקה המקיימת

$$T(1,0,0) = (0,2)$$
$$T(2,0,1) = (1,0)$$
$$T(0,0,1) = (1,2)$$

א. T אינה יכולה להיות לינארית.

הפרכה:

רואים בקלות ש $(2,0,1) = 2(1,0,0) + (0,0,1)$ וכמו כן

$T(2,0,1) = (1,0) = (1,6) = (0,4) + (1,2) = 2T(1,0,0) + T(0,0,1)$ (מעל $\mathbb{Z}^3$).

ולכן המשוואה השנייה נובעת מהראשונות. לפי משפט ההגדרה עבור $T(0,1,0) = w$ נקבל העתקה לינארית לכל $w \in \mathbb{Z}^2$.

ב. יש אין סוף אפשרויות עבור העתקות לינאריות המקיימות תנאי זה.

הפרכה:

יש מספר סופי של העתקות בכלל (אפילו לא לינאריות) בין שני מרחבים סופיים.

ג. יש העתקה אחת ויחידה שהיא לינארית ומקיימת תנאי זה.

הפרכה:

ניתן לבחור $w = (0,0,0), w = (1,1,1)$ ולפי משפט ההגדרה נקבל שתי העתקות לינאריות שונות.

ד. יש מספר סופי של העתקות לינאריות המקיימות תנאי זה, אף לא אחת מהן חד חד ערכית.

הוכחה:

הסברנו קודם למה יש מספר סופי של העתקות כאלה. על מנת שההעתקה כזו תהיה חח"ע היא צריכה להיות בעלת גרעין אפס. לכן לפי משפט הדרגה מימד התמונה שלה הוא 3. אבל לא יכולה להיות תמונה ממימד 3 במרחב ממימד 2, ולכן אין העתקה לינארית חח"ע בין שני המרחבים הללו.

שאלה 9

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

(כל סעיף=5 נקודות).

יהי $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & 2a \end{pmatrix} \middle| a,b\in C\right\}$.

א. V תת מרחב של $M_2(C)$ כמרחב וקטורי מעל C.

הפרכה:

נבדוק לפי הקריטריון המקוצר. יהיו $u=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & 2a \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} c & d \\ \overline{d} & 2c \end{pmatrix}\in V$, ברור ש $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ לפי ההגדרה. נניח $\alpha\in\mathbb{C}$. נבדוק האם $u+\alpha w\in\mathbb{C}$.

$u+\alpha w=\begin{pmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ \overline{b}+\alpha\overline{d} & 2a+\alpha 2c \end{pmatrix}$. אם $u+\alpha w\in\mathbb{C}$ אזי לפי הגדרה מתקיים $\overline{b}+\alpha\overline{d}=\overline{b+\alpha d}$

וקל לתת דוגמא נגדית עם $\alpha=i$. ולכן אין סגירות וזה לא מרחב וקטורי מעל המרוכבים.

ב. V תת מרחב של $M_2(C)$ כמרחב וקטורי מעל $\Re$.

הוכחה:

נבצע אותה בדיקה עבור $\alpha\in\mathbb{R}$. ברור ש $\alpha=\overline{\alpha}$ ולכן אכן $u+\alpha w=\begin{pmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ \overline{b+\alpha d} & 2(a+\alpha c) \end{pmatrix}\in V$

נותר להראות ש $V\neq\phi$. קל לראות ש $0\in V$ מ.ש.ל.