

חשבון אינפי מתקדם תרגיל 1 – פתרון

.1

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad \text{א.}$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

(עיגול עם מרכז ב $(0,0)$ ורדיוס 1 לא כולל מעגל) .

$$f(x, y) = xe^{-\sqrt{y+2}} \quad \text{ב.}$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2\}$$

(חלק של המישור מעל הקו $y = -2$) .

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + y + z} \quad \text{ג.}$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 0\}$$

(כל הנקודות ב \mathbb{R}^3 חוץ מהנקודות של המישור $x + y + z = 0$) .

$$f(x, y, z) = z + \ln(1 - x^2 - y^2) \quad \text{ד.}$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

(החלק הפנימי של הגליל (לא כולל מעטפת) עם בסיס עם רדיוס 1 ומרכז על הציר z) .

.2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,\pi)} x^2 \sin \frac{y}{x} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,\pi)} x^2 \sin \frac{y}{x} = 16 \sin \frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}$$

↑

הצבנו בגלל רציפות הפונקציה $x^2 \sin \frac{y}{x}$

בנקודה $(4, \pi)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \frac{3}{2}$$

← הגבול הנתון אינו קיים .

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 9} - 3} \quad .ג.$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x^2 + y^2 + z^2}} \frac{t}{\sqrt{t+9} - 3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{t+9} + 3)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t+9} + 3 = 6$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad .ד.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{4x + y - z}{2x - 5y + 2z} \quad .ה.$$

$$\lim_{\substack{x=y=0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{4x + y - z}{2x - 5y + 2z} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x=z=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4x + y - z}{2x - 5y + 2z} = -\frac{1}{5}$$

← הגבול הנתון אינו קיים .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2 - 2xy - y^2}} \quad .ו.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2 - 2xy - y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{(x-y)^2}}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x-y}} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{t}} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{t}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^2} \quad .ז.$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x=y \\ z=x^2 \\ x \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

← הגבול הנתון אינו קיים .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(y, \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} \right) \quad \text{ה.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} = ?$$

$$\lim_{\substack{x=y \\ x \rightarrow 0}} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} = 0$$

$$\text{אינו קיים.} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} \Leftarrow$$

$$\text{אינו קיים.} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(y, \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} \right) \Leftarrow$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x=y \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

\Leftarrow הגבול הכפול אינו קיים.

4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos \frac{1}{y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos \frac{1}{y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2}{|x|+|y|} \right|$$

$$\leq \frac{|x^2|}{|x|} = |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos \frac{1}{y^2} = 0$$

א.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos \frac{1}{y^2} = \text{אינו קיים}$$

ב.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos \frac{1}{y^2} = 0$$

פתרון תרגילים נוספים :

פתרון

א/עבור התחמה 1/1 (באופן גנלי עם 1)

1

1) (b) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right)$

כאשר נפרק $x \neq -y$ כלומר $x \neq -y$.

מתחילת ההגדרה של \arccos :

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$$

\Downarrow

$$|x| \leq |x+y|$$

ik

$$x+y \leq -|x|$$

$$x+y \geq |x|$$

$$|x| \leq -(x+y)$$

$$\Downarrow$$

$$-(x+y) \leq x \leq x+y$$

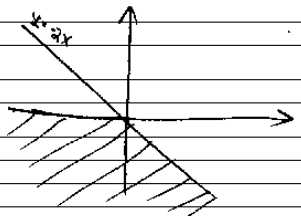
$$\Downarrow$$

$$x+y \leq x \leq -(x+y)$$

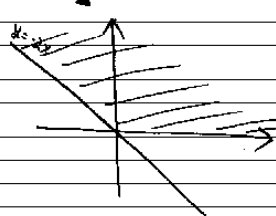
$$\Downarrow$$

$$\text{pr} \begin{cases} y \leq 0 \\ y \leq -2x \end{cases}$$

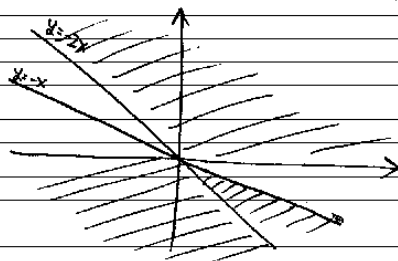
$$\text{pr} \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -2x \end{cases}$$



ik



(כאן) $x \neq -y$ ונקבל :



Ⓐ $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

$\log_a x \Rightarrow \underline{x > 0}$ - ע'כ"ל

$x^2+y^2+z^2 \neq 0$ - רק חציין אפ"ש ע'

$x^2+y^2+z^2 \geq 0$ (אך אף תמיד) $x^2+y^2+z^2 \geq 0$ אלא

רק נקודת אפ"ש $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ וכן אפ"ש רק בנקודה $(0,0,0) \neq (x,y,z)$

אזרחות (ההגדרה) (א): $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Ⓑ $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(9-x^2-y^2)}}$

מאחר ומאחר קטרים, ישנם נקודות באינר (נקודות):

$(x^2+y^2-1)(9-x^2-y^2) > 0$

ישנם שני מקרים: iR (שניהם חיוביים) / iR (שניהם שליליים)

$P_{H1} \begin{cases} x^2+y^2-1 > 0 \\ 9-x^2-y^2 > 0 \end{cases}$

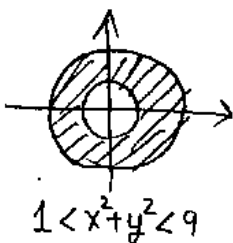
$P_{H2} \begin{cases} x^2+y^2-1 < 0 \\ 9-x^2-y^2 < 0 \end{cases}$

\Downarrow
 $P_{H1} \begin{cases} x^2+y^2 > 1 \\ x^2+y^2 < 9 \end{cases}$

\Downarrow
 $P_{H2} \begin{cases} x^2+y^2 < 1 \\ x^2+y^2 > 9 \end{cases}$

אם $x^2+y^2 < 1$ וכן $x^2+y^2 > 9$ אינם קיימים
: 1,3

אם $x^2+y^2 > 1$ וכן $x^2+y^2 < 9$
 \emptyset



אזרחות (ההגדרה)! ←

2)

$$\textcircled{a} \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{3x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{3 + y/x} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

\downarrow
 y/3 Sin
 2/3

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{3x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 0 = 0$$

\downarrow
 2/3 Sin

3)

$$\textcircled{a} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t}-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{t}-4} = \lim_{t \rightarrow 0} 2\sqrt{t} = 0$$

\downarrow
 2/3 t
 $t = x^2 + y^2$
 $t \rightarrow 0$ 2/3 $x^2 + y^2 \rightarrow (0,0)$

$$\textcircled{b} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = ?$$

1/2 Sin 2/3

$$\left. \begin{array}{l} y=kx \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

\downarrow
 k-2 1/2 2/3
 2/3 1/2 2/3

$$\textcircled{c} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

1/2 Sin 2/3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k)^2x^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{(1+k)^2}{1+k^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ y=kx \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$$

2/3 1/2 2/3 k-2 1/2

$$\textcircled{3} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2+2xy+y^2}}$$

$$\frac{-|x-y|}{(x-y)^2} = \frac{-1}{|x-y|} \quad -\infty \text{ של } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$0 \leq |x-y| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$$

∴ ∞

$$\frac{-1}{|x-y|} \rightarrow -\infty \text{ של } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{1}{|x-y|}} = 0$$

∴ ∞ של ∞

