תרגול 5-אושרית

מרחבים וקטוריים, תתי מרחבים, סכום וחיתוך תתי מרחבים

צלמו שיהיה מולכם במהלך התרגול

הגד' מרחב וקטורי: (מ"ו)

תהי V קב' ויהי שדה F.

V נקרא- מרחב וקטורי מעל F, אם מוגדרות עליו 2 הפעולות חיבור וכפל בסקלר ומתקיימות התכונות הבאות

1) **סגירות:** לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in F$, $v_1+v_2\in V$, $\alpha\cdot v_1\in V$

2) **חילוף:** לכל $v_1,v_2\in V$, $v_1+v_2=v_2+v_1$

3) **אסוציאטיביות:** $v_1+(v_2+v_3)=(v_1+v_2)+v_3$, $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)\cdot v$

4) **ניטרלי לחיבור:** קיים $0_v\in V$ כך שלכל $v\in V$, $0_v+v=v$

5) **איברים נגדיים:** לכל $v\in V$ קיים - $"-v"\in V$ כך ש- $v+("-v")=0_v$

6) **חוק הפילוג:** $(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$ וגם - $\alpha(v_1+v_2)=\alpha v_1+\alpha\cdot v_2$

7) **ניטרלי לכפל בסקלר:** $1_F\cdot v=v$

טרמינולוגיה: איברי V נקראים וקטורים, איברי F נקראים סקלרים.

תכונות בסיסיות שראינו בהרצאה:

1) $(-1_F)\cdot v = (-v)$

2) $0_F \cdot v = 0_v$

תרג: קבעו - האם מרחב וקטורי/לא מרחב וקטורי:

1) $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור - $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ חיבור רכיב רכיב

כפל בסקלר: $\alpha(a_1,\dots,a_n)=(\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)$

2) מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{m\times n}$ מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל בסקלר רגיל.

3) מרחב הפולינומים מעל שדה מדרגה קטנה שווה ל-n. $\mathbb{F}_n[x]=\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid \forall i\ a_i\in\mathbb{F}\}$

מעל שדה $\mathbb{F}$ עם פעולות חיבור פולינומים וכפל בסקלר טבעיים.

4) $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.

כולם מרחבים וקטוריים. יש- להוכיח שמקיימים את כל 7 האקסיומות.
שיעורי בית ☺

האם מרחב וקטורי?

5) $V=\mathbb{R}^3$ מעל $F=\mathbb{C}$ עם חיבור וכפל בסקלר סטנדרטיים. $\boxed{\text{לא}}$

מספיק להראות ש- 1 האקסיומות לא מתקיימת.

אין סגירות לכפל בסקלר $\Leftarrow$ לדוג' $i\in\mathbb{C}$ $(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ $i\cdot(1,1,1)=(i,i,i) \notin \mathbb{R}^3$

$\Leftarrow$ לא מרחב וקטורי.

האם מרחב וקטורי?

6) נניח $V=\mathbb{R}^2$ כאשר $F=\mathbb{R}$ עם חיבור סטנדרטי, וכפל בסקלר - $\alpha\cdot(x,y)=(\alpha\cdot x,y)$

מצד 1 - $2\cdot(0,1)=(0,1)$

מצד 2 - $1\cdot(0,1)+1\cdot(0,1)=$

$=(0,1)+(0,1)=(0,2)$

לא מתקיים - פילוג.

ניתן לכתוב את הסקלר 2 כ
1+1

ולפתוח לפי פילוג

תתי מרחבים:

הגדרה: V מ"ו מעל F, תת קבוצה $W \subseteq V$ יקרא תת-מרחב אם הוא - מ"ו ביחס לפעולות V

$W \leq V$. (תמ"ו)

איך בודקים בתרגילים?

הקריטריון המקוצר: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק:

1) איבר ניטרלי: $0_V \in W$. או מספיק לבדוק - $W \neq \phi$

2) סגירות לחיבור: לכל $u,w \in W$ מתקיים $u+w \in W$

3) סגירות לכפל בסקלר: לכל $\alpha \in F$, $w \in W$ מתקיים - $\alpha \cdot w \in W$.

דוגמה: $\{0\}$, $V \subseteq V$ תמיד תמ"ו, נקראים תמ"ו טריוויאליים.

הערה: את בדיקה 2 ו-3 ניתן לאחד לבדיקה אחת לכל $\alpha \in F$ ולכל - $u,w \in W$

צריך להראות כי $\alpha u + w \in W$.

תרגיל: קבעו אם הבאים תמ"ו:

1) $W=\{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ = ציר ה-X. האם תמ"ו של $\mathbb{R}^2$.

פתרון: כן נבדוק שמקיים את האקסיומות.

1) $W \ni (0,0)$ ✓ אוקי - מתקיים

2) סגירות לחיבור וכפל בסקלאר: יהיו $(x,0),(y,0)\in W$ וכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ונרצה להראות כי -

$$\alpha(x,0)+(y,0)\in W$$

$$\alpha(x,0)+(y,0) \underset{\text{נחשב}}{=} (\alpha\cdot x,0)+(y,0)=(\alpha x+y,0)\in W$$

כי $\mathbb{R}$ שדה ולכן $\mathbb{R}$ סגור לחיבור וכפל.

$\Leftarrow$ W תמ"ו לפי קריטריון מקוצר

האם תמ"ו?

ונפל.

ב) $W=\{a+bx \mid b\neq 0\in\mathbb{R}\}$ הפולינומים מדרגה 1 בדיוק מעל $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{לא}}$

איבר האפס לא ב-W כי פולינום האפס <u>אינו</u> פולינום מדרגה 1

האם תמ"ו?

3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in F \right\}$ תת מרחב של מטריצות מאות מעל F $\boxed{\text{כן}}$

הוכחה:

1) ברור כי- $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in W$

2) <u>סגירות לחיבור וכפל בסקלר:</u> תהיינה המטריצות $\begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in W$

ותהי- $\alpha \in F$ ונרצה להראות כי-

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in W$$

לפי חיבור
וכפל בסקלר
של מטריצה

כי ש- $\alpha a + b \in F$
כי F שדה.

$\Longleftarrow$ W תמ"ו לפי קריטריון מקוצר.

האם תמ"ו?

4) המטריצות הסימטריות $W=\{A\in V \mid A=A^t\}$ תמ"ו

<u>הוכחה:</u>

1) ברור כי מטריצת האפס סימטרית ולכן - $0\in W$.

2) <u>נראה סגירות לחיבור וכפל בסקלר</u> - ויהיו $A,B\in W$ ~~ו~~ויהי - $\alpha\in F$

ונרצה להראות כי- $\alpha A+B\in W$

נשים לב - נחשב את

$$(\alpha A+B)^t=(\alpha A)^t+B^t=\alpha A^t+B^t=\alpha A+B$$

ולכן - $A,B\in W$ $A^t=A$, $B^t=B$

$\Leftarrow$ אזי - $\alpha A+B\in W$.

עוד תמ"ו לשירותכם:

עוד 3 דוג' ללא הוכחה - מוזמנים לנסות בבית!!! (כו-

1) מטריצות משולשיות/אלכסוניות/סקלריות הן תמ"ו

2) המטריצות - $W=\{A\in V \mid tr(A)=0\}$ הן תמ"ו,

3) $W=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$

חיתוך תתי מרחבים:

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, W_1, W_2 תמ"ו אזי - $W_1 \cap W_2$ תמ"ו.

הערה: זהו - תת המרחב הכי גדול שמוכל ב-W_1, W_2,
כלומר לכל מרחב $U \subseteq W_1, W_2$ מתקיים $U \subseteq W_1 \cap W_2$.

תרגיל: יהי $V = \mathbb{R}^4$ נגדיר - 2 תתי מרחבים $W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V : x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$

$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V : x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \wedge -x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$

צ"ל - $W_1 \cap W_2 = ?$

פתרון: נשים ♡ שניתן לאפיין את W_1 ו- W_2 ע"י מטריצות.

$W_1 = \{v \in V \mid A_1 v = 0\}$ כאשר $A_1 = (1,1,1,1)$

$W_2 = \{v \in V \mid A_2 v = 0\}$ כאשר $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{v \in V \mid \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} v = 0\right\} = \left\{v \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0\right.$$

המשך פתרון:

עתה לבסיס-מאוחד-נפתור את המערכת המתאימה-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$w=0$

$x=0$

$z=t$ - נסמן

$y=-t$

$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

דוגמא 2:

יהא $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$.

$W_1=$ תת"מ של מטריצות סימטריות

$W_2=$ תת"מ של מטריצות אנטי-סימטריות

חשבו את- $W_1\cap W_2$.

$$W_1\cap W_2=\{A : A=A^t \wedge A^t=-A\}$$

פתרון: לפי הגד' הקב' $W_1\cap W_2$ מתקיים כי $A=-A \Leftarrow 2A=0 \Leftarrow \boxed{A=0} \Leftarrow W_1\cap W_2=\{0\}$

הגד: יהי V מ"ו מעל F, ויהיו $W_1, W_2 \le V$ תמ"ו.
אזי: $W_1+W_2=\{w_1+w_2 \mid w_1\in W_1 ,\ w_2\in W_2\}$ הינו תמ"ו

בהו התמ"ו הכי קטן שמכיל את W_1 ו- W_2

הגד: סכום ישר: $W_1 \oplus W_2$ אם $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ב) $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$

דוג: $W_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ $W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

הוכיחו כי מדובר בסכום ישר

הסבר: נוכיח הכלה דו כיוונית:

$\supseteq$ ברור כי W_1 ו- W_2 מרחבים וקטוריים וחיתוך של מרחבים וקטוריים הוא תמ"ו ובפרט מכיל את וקטור האפס.

$\subseteq$ יהי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in W_1\cap W_2$ אזי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in W_1$ ולכן $x=0$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in W_2$ ולכן $y=0$

$\Leftarrow$ נקבל כי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ולכן מדובר בסכום ישר.

המרחבים מהתרגיל הקודם

תרגיל:

צ"ל - $W_1+W_2=\mathbb{R}^2$ (כלומר צ"ל היא וצריך לפרוש את המישור $\mathbb{R}^2$)

הוכחה: נוכיח הכלה דו כיוונית.

⊆ ברור - שמוכלים ב-$\mathbb{R}^2$.

⊇ יהי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ונרצה להוכיח כי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in W_1+W_2$ נשים לב שמתקיים -

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underset{\in W_1}{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}}+\underset{\in W_2}{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}}\in W_1+W_2$$

<u>משל</u>

תרגיל מסכם: (לפי מבחן מועד א)

תהא המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

ונגדיר -

$$U = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v \}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

א) צ"ל - U, W תמ"ש של $\mathbb{R}^3$. (5 נק')

פתרון:

U ← ~~[illegible]~~

דבר ראשון - נבין מיהו ה~~[illegible]~~מרחב הנ״ל

$Av = -v \Rightarrow Av + v = 0 \longrightarrow (A+I)\cdot v = 0$

כלומר - נחשב את המטריצה $A+I$

$$A+I = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 5\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ -1 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

לפיכך המרחב U הוא - ~~[illegible]~~ מרחב וקטורי במרחב הפתרונות של המטריצה $A+I$ כלומר - $U = N(A+I)$ וראינו בהרצאה שהוא תת-מרחב.

W ← יש דרך יותר יפה לפתרון בהמשך כשנלמד עוד חומר... (בעזרת הגרעין [illegible])

בינתיים - נחשב לפי קריטריון מקוצר

1) נוכיח כי- $0 \in W$ ברור שאם $a,b=0$ נקבל כי- $\begin{pmatrix}0+0\\-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in W$

2) נוכיח סגירות לחיבור + כפל בסקלר.

$\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c+d\\-d\\c-d\end{pmatrix} \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$

ונרצה להראות כי-

$$\alpha\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c+d\\-d\\c-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a+\alpha b+c+d\\ -\alpha b-d\\ \alpha a-\alpha b+c-d\end{pmatrix} \underset{(נניח)}{=} \begin{pmatrix}e+f\\-f\\e-f\end{pmatrix} \in W$$

וכן - אם.

$\alpha a + c = e$ כאשר $e \in \mathbb{R}$

$\alpha b + d = f$ כאשר $f \in \mathbb{R}$

הגד': יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2,\dots,v_n \in V$ ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{F}$ אזי הביטוי $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי של $v_1,\dots,v_n$.

דוג': $V=\mathbb{R}^2$ $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

אזי: $\pi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$ הוא צ"ל.

הגד': בהינתן n וקטורים $v_1,\dots,v_n$ מוגדר להם קב' כל הצירופים הלינאריים של הוקטורים האלו.

$$\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_n\}=\{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \mid \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$$

באופן כללי: תהא $S\subseteq V$ תת קב' של מ"ו (יכולה להיות אינסופית) אזי - אוסף הצ"ל של כל תתי הקב' הסופיות של S.

$$\mathrm{span}(S)=\{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \mid n\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F},\ v_1,\dots,v_n\in S\}$$

בהצלחה!!!