משפט עזר 1

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\middle|\begin{array}{c}|x_i|<a,\|y\|\le b\\ i=1,...k\end{array}\right\}$$

$$f:D\to\mathbb{R}^s$$

רציפה, ומקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס לy עם קבוע ליפשיץ $q<1$. $f(0,0)=0$

אזי: קיים $0<a'<a$ כך שלכל x בתא $I=\left\{x\in\mathbb{R}^k\middle||x_i|\right\}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $y=f(x,y)$ עם $\|y\|\le b$. הפונ' $y=\varphi(x)$ הנקבעת על ידי זה היא רציפה בI ו$\varphi(0)=0$

השלמת פרטים בהוכחה(משיעור קודם)

$\epsilon\doteqdot(1-q)b$. $f_0(x)\doteqdot f(x,0)$ רציפה על $D_0=\{x||x_i|<a\}$. לכן קיים $\delta>0$ כך ש$\|f_0(x)\|<(1-q)b\,(=\epsilon)$ כאשר $x\in D_0$ $x\in D_0$. לוקחים $a'<\min\left\{a,\dfrac{\delta}{\sqrt{k}}\right\}$.

ניקח I כמו בניסוח משפט העזר. אם $x\in X$, $x\in D_0$ כי $|x_i|\le a'<a$ וכמו כן $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\underbrace{x_i}_{<\frac{\delta^2}{k}}}<\sqrt{\delta^2}=\delta$, לכן $\boxed{\|f_0(x)\|<(1-q)b}$

קיבלנו פתרון יחיד למשוואה $y=f(x,y)$ המקיים $\|y\|\le b$, לכל x נתון בI. ע"י כך מוגדרת הפונקציה $y=\varphi(x)$ על I, וφ זו נמצאת ב$C_b(I,\mathbb{R}^s)$, ז"א רציפה בI.

אם y פתרון ל$x\in I$ כלשהו של המשוואה, המקיים $\|y\|\le b$, אזי $\forall x\in I,\quad (x,y)\in D$. לכן, ע"פ ליפשיץ עבור f בD

$$\|y-\varphi(x)\|=\left\|\overbrace{f(x,y)}^{\in D}-\overbrace{f(x,\varphi(x))}^{\in D}\right\|\le q\|y-\varphi(x)\|$$

$$0\le(1-q)\|y-\varphi(x)\|\le0$$

$$\|y-\varphi(x)\|=0$$

$$y=\varphi(x)$$

$\blacksquare$

משפט עזר 2(תנאי מספיק לליפשיץ בעזרת הגרדיינט)

תהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$ פתוחה עם התכונה שלכל שתי נקודות $(x,y),(x,y')\in\Omega$ הקטע המחבר אותן מוכל כולו בΩ. תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}^s$ ממח' C^1 יחסית לy בΩ, ונניח שקיימים מספרים חיוביים q_r $(r=1,...s)$ כך ש$\|\nabla_y f_r\|\leq q_r$ לכל $r=1,...s$ על Ω. אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ יחסית לy בΩ עם קבוע ליפשיץ $\|q\|$(כש$q=(q_1,...q_s)$).

הוכחה

לכל $r=1,...s$ וx קבוע כך ש$f_r(x,\cdot)$ היא פונ' ממשית ממח' C^1(כפונ' של y עבור yים כנ"ל). לכן משפט הערך הממוצע מקיים

$$f_r(x,y)-f_r(x,y')=(y-y')\cdot\nabla_y f(x,\tilde{y})$$

במקום של $(x,\tilde{y})$ נקודה על הקטע המחבר את (x,y) ו(x,y') ולכן נמצאת בΩ(הנחת מ"ע).

לכן, לפי הנחת מ"ע,

$$\forall r=1,...s\quad \|\nabla_y f_r(x,\tilde{y})\|\leq q_r$$

על כן, לפי קושי-שוורץ

$$|f_r(x,y)-f_r(x,y')|\leq\|y-y'\|\,\|\nabla_y f(x,\tilde{y})\|\leq q_r\|y-y'\|$$

$$\forall (x,y),(x,y')\in\Omega$$

$$\|f(x,y)-f(x,y')\|=\sqrt{\sum_{r=1}^{s}|f_r(x,y)-f_r(x,y')|}\leq\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{s}q_r^2\right)\|y-y'\|^2}=\|q\|\,\|y-y'\|$$

כלומר: f ליפשיץ ביחס לy עם קבוע $\|q\|$

משפט הפונקציות הסתומות למערכת של s משוואות בs "נעלמים"

תהי $F:\Omega\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ רציפה בתא הפתוח $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\middle|\begin{array}{l}|x_i-x_i^0|<a,i=1,...k\\|y_j-y_j^0|<b,j=1,...s\end{array}\right\}$, a,b נתונים. נניח שF ממח' C^1 יחסית לy בΩ ו$\left.\frac{\partial(F_1,...F_s)}{\partial(y_1,...y_s)}\right|_{(x^0,y^0)}\neq 0$, $F(x^0,y^0)=$

0

אזי קיימים $0<a'<a$ ו$0<b'<b$ כך שלמשוואה $F(x,y)=0$ יש פתרון יחיד y בתא $J\doteqdot\left\{y\middle||y_j-y_j^0|\leq b',j=1,...s\right\}$. לכל x בתא $I\doteqdot\left\{x\middle||x_i-x_i^0|\right\}$. ההתאמה $x\leftarrow y$ מגדירה פונקציה $y=\varphi(x)$ מI לJ שהיא רציפה ו$\varphi(x^0)=y^0$

דוגמה $k=s=1$

$$x^2+y^2-1=0$$

$$F(x,y)\equiv x^2+y^2-1$$

$$\Omega: \begin{array}{c} -1<x<1 \\ -1<y<1 \end{array} \qquad (a=b=1)$$

$$\left(x^0,y^0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1=0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\left(x^0,y^0\right)}=\left.2y\right|_{\dots}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\neq 0$$

$y=+\sqrt{1-x^2}$ - הפתרון היחיד

הוכחה

ע"י הזזת x ו-y, אפשר להניח $\left(x^0,y^0\right)=(0,0)$. לכן הנתונים הם:

$$\Omega=\left\{(x,y)\left| \begin{array}{c} |x_i|<a\forall i \\ |y_j|<b\forall j \end{array}\right.\right\}$$

$$F(0,0)=0 \quad \frac{\partial\left(F_1,\dots F_s\right)}{\partial\left(y_1,\dots y_s\right)}(0,0)\neq 0$$

נסמן $A=\left.\left(\frac{\partial\left(F_1,\dots F_s\right)}{\partial\left(y_1,\dots y_s\right)}\right)\right|_{(0,0)}=\left(a_{jr}\right)_{s\times s}$. לפי הנתון $B\doteqdot A^{-1}$ קיימת.

נגדיר $f(x,y)\doteqdot y-A^{-1}F$ ($(x,y)\in\Omega$, A^{-1} קבוע, וקטורים כתובים כעמודים)
f רציפה ב-Ω. המשוואה $F(x,y)=0$ שקולה למשוואה $\boxed{f(x,y)=y}$. $f(0,0)=0$
נגדיר:

$$D\doteqdot\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\left| \begin{array}{c} 1\leq i\leq k \\ |x_i|<a \\ \|y\|\leq\beta \end{array}\right.\right\}$$

במקום ש-$0<\beta<b$ כלשהו, כי $D\subset\Omega$, $|x_i|<a$ עבור $(x,y)\in D$

$$|y_j|\leq\|y\|_\infty\leq\|y\|\leq\beta<b \quad \forall j$$

לכן f רציפה ב-D, ו וממח' C^1 יחסית ל-y ב-D.

$$[BA]_{rj}=[ld]_{rj}=\delta_{rj}$$

$$\nabla_y f_r|_{(0,0)} = 0$$

$\Leftarrow \nabla_y f_r$ פונקציה רציפה המתאפסת ב$(0,0)$. נקבע $0 < q < 1$ שרירותי. קיים $0 < \beta' < \beta$ כך ש$\|\nabla_y f_n\| < \frac{q}{\sqrt{s}}$לכל $1 \le r \le s$ ולכל y כך ש$|y_j| < \beta'$ ו$|x_u| < a$

לפי משפט עזר 2, f מקיימת את תנאי ליפשיץ(כאשר (x,y) כנ"ל) עם קבוע ליפשיץ

$$\left\|\left(\frac{q}{\sqrt{s}}, \ldots \frac{q}{\sqrt{s}}\right)\right\| = \frac{q}{\sqrt{s}}\left\|\overbrace{(1, \ldots 1)}^{s}\right\| = \frac{q}{\sqrt{s}}\sqrt{s} = q$$

$$\boxed{f(x,y) = y}$$