מערכות של מד"ר

לצורך הנוחות נעבור משתנה מx לt: $y(x) \to y(t)$

- מד"ר אחד(מסדר ראשון) $y' = f(t, y)$.
- זוג של מד"רים מסדר ראשון: $\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$
- מערכת של n מד"רים:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, ...y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, ...y_n) \end{cases}$$

או

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$$

ניתן לכתוב מד"ר מסדר n בצורה נורמלית כמערכת של n מד"רים(מסדר ראשון).

לדוגמה $\quad (*) \quad y'' = f(t, y, y')$. נגדיר $\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{matrix}$ ואז $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t, y, y_2) \end{cases} (**)$

מה שהראנו שניתן לקחת פתרון $(*)$ ולבנות פתרון (y_1, y_2)של $(**)$.
נראה גם הפוך. בהינתן פיתרון (y_1, y_2) של $(**)$ נגדיר $y = y_1$, $y' = y_1' = y_2$

$$y'' = y_2' = f(t, y, y_2) = f(t, y, y')$$

כלומר y פותר את $(*)$.

למשוואה מסדר שלישי $y''' = f(t, y, y', y'')$ נגדיר $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases}$ואז $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = f(t, y, y', y'') \end{cases}$

ההפך לא נכון!!!

יש מערכות של n מד"רים (מסדר ראשון) שלא ניתן לפתור במשוואה מסדר n.

בעיית קושי למערכת

$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ + תנאי התחלה $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

משפט קיום ויחידות לבעיית קושי

$\vec{f}(t,\vec{y})$ מוגדרת על "מלבן"

$$a,b_1,..b_n>0\begin{cases}|t-t_0|\le a\\ |(\vec{y}-\vec{y}_0)_1|\le b_1\\ \vdots\\ |(\vec{y}-\vec{y}_0)_n|\le b_n\end{cases}$$

- $\vec{f}$ רציפה על המלבן D
- $|f_1|\le M_1$, $|f_2|\le M_2$,... $|f_n|\le M_n$ על D
- תנאי ליפשיץ:

$$\left|\vec{f}(t,\vec{y})-\vec{f}\left(t,\vec{Y}\right)\right|\le k\left\|\vec{y}-\vec{Y}\right\|$$

לכל $(t,\vec{y}),\left(t,\vec{Y}\right)$ ב-D.

תחת תנאים אלה קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי והוא מוגדר בקטע $|t-t_0|\le\min\left\{a,\frac{b_1}{M_1},...\frac{b_n}{M_n}\right\}$

הוכחה

דומה למשוואה אחת(הרצאה קודמת) - לא נוכיח. הכל מבוסס על המשוואה האינטגרלית

$$\vec{y}(t)=\vec{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds$$

משפט הקיום והיחידות למשוואה מסדר n. נובע מהמשפט למערכות של המשוואות(מסדר ראשון).

מערכת לינארית

$\vec{y}'=f(t,\vec{y})$ - מערכת כללית. מערכת לינארית היא

$$\vec{y}'=A(t)\,\vec{y}+\vec{b}(t)$$

כאשר $A(t)$ מטריצה $n\times n$ ו-$\vec{b}(t)$ קטע ממימד n(סקלר)

$$\begin{cases}y_1'=a_{11}(t)\,y_1+a_{12}(t)\,y_2+...+a_{1n}(t)\,y_n+b_1(t)\\ \vdots\\ y_n'=a_{n1}(t)\,y_1+a_{n2}(t)\,y_2+...+a_{nn}(t)\,y_n+b_1(t)\end{cases}$$

המערכת הומוגנית $\Leftrightarrow\vec{b}(t)=\vec{0}$

כל מה שלמדנו למשוואה לינארית מסדר n, יש לו אנלוג למערכות לינאריות:

(1) מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא מרחב וקטורי, כלומר אם $\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)}$ 2 פתרונות של המערכת ו$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, אזי $\vec{y}=\alpha_1\vec{y}^{(1)}+\alpha_2\vec{y}^{(2)}$ הוא גם פתרון.

הוכחה: $\left(\alpha,\vec{y}^{(1)}+\alpha_2\vec{y}^{(2)}\right)'=A\left(\alpha_1\vec{y}^{(1)}+\alpha_2\vec{y}^{(2)}\right)\Leftarrow\begin{cases}\vec{y}^{(1)\prime}=A\left(t\right)\vec{y}^{(1)}\\ \vec{y}^{(2)\prime}=A\left(t\right)\vec{y}^{(2)}\end{cases}$

(2) ניתן לכתוב את הפתרון הכללי של האי הומוגני בצורה $\vec{y}=\vec{y}_p+\vec{y}_c$ כאשר $\vec{y}_p$ זה פתרון פרטי של האי הומוגני ו$\vec{y}_c$ זה פתרון כללי של ההומוגני.

(3) האנלוג של הוורונסקיאן הוא

$$W=\left(\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},...\vec{y}^{(n)}\right)=\det\left|\left|\vec{y}^{(11)}\quad...\quad\vec{y}^{(1n)}\right|\right|$$

מטריצה עם עמודות.

משפט ליוביל (אוסטרוגרדסקי)

אם $\vec{y}^{(1)},...\vec{y}^{(n)}$ פתרונות של $\vec{y}'=A\left(t\right)\vec{y}$ אזי $W\left(t\right)=W\left(t_0\right)$כאשר$\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}\left(A\left(s\right)\right)ds$

הוכחה

$$W=\det\left(\vec{y}^{(1)}\quad\vec{y}^{(2)}\quad...\quad\vec{y}^{(n)}\right)$$

ניתן לגזור שורה שורה או עמודה עמודה(נגזור שורה שורה):

שורה i: $\left(y_i^{(1)}\quad...\quad y_i^{(n)}\right)$

$$\left(y_i^{(1)\prime}\quad...\quad y_i^{(n)\prime}\right)=\left(A_i\vec{y}^{(1)}\quad...\quad A_i\vec{y}^{(n)}\right)=A_i\left(\vec{y}^{(1)}\quad...\quad\vec{y}^{(n)}\right)$$

אנו רוצים להסתכל על

$$\det\begin{pmatrix}y_1^{(n)} & ... & y_1^{(2)} & ... & y_n^{(n)}\\ y_2 & ... & y_2^{(2)} & ... & y_n^{(2)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{i1}y_1^{(1)}+A_{i2}y_2^{(1)} & ... & A_{i1}y_1^{(2)}+A_{i2}y_2^{(2)} & ... & A_{i1}y_1^{(n)}+A_{i2}y_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

כל דבר שבשורה שגזרנו ניתן להוריד ע"י צירוף עם שורה אחרת למעט $\left(A_{ii}y_i^{(1)}\quad...\quad A_{ii}y_i^{(n)}\right)$, ולכן זה שווה $A_{ii}W$.

לעשות את הנגזרת של הdet גוזרים שורה שורה

$$W'=A_{11}W+A_{22}W+...+A_{nn}W=\mathrm{Tr}\left(A\right)W$$

$$(\ln W)' = \frac{W'}{W} = \mathrm{Tr}\,(A)$$

$$\ln W\,(t) - \ln W\,(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\,(A\,(s))\,ds$$

$$\boxed{W\,(t) = W\,(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds}}$$

$\blacksquare$

$\vec{y}' = A\,(t)\,\vec{y} + \vec{b}\,(t)$ - מ. לינארית

וריאציית מקדמים

בהינתן כל הפתרונות של ההומוגני, איך פותרים לא הומוגני?
$\vec{y}' = A\vec{y}$ - n פתרונות בת"ל $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, ...\vec{y}^{(n)}$. הפתרון הכללי של ההומוגני

$$\alpha_1\vec{y}^{(1)} + \alpha_2\vec{y}^{(2)} + ... + \alpha_n\vec{y}^{(n)} = \begin{pmatrix}\vec{y}^{(1)} & ... & \vec{y}^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = Y$$

נקרא למטריצה זו Y - מטריצת פתרון יסודית.
פתרון ההומוגני: $Y\vec{\alpha}$, α קבוע.
נחפש פתרון של האי הומוגני בצורה $\vec{y} = Y\vec{\alpha}\,(t)$. רוצים $\vec{y}' = A\,(t)\,\vec{y} + b\,(t)$ $\Leftrightarrow$
$Y'\vec{\alpha} + Y\vec{\alpha}' = AY\vec{\alpha} + \vec{b}\,(t)$
כל עמודה Y_k מקיימת את ההומוגני $\vec{y}' = A\vec{y}$ ולכן $Y' = AY$. יש לבחור $\vec{\alpha}' = Y^{-1}\vec{b}$

דוגמה

$$\vec{y}' = \overbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}}^{A}\vec{y} + \overbrace{\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}}^{\vec{b}}$$

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + 1 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 + t \end{cases}$$

המערכת ההומוגנית היא:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \Rightarrow -y_1'' = 2y_1 - 3y_1'$$

$$\Rightarrow y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$(m-1)(m-2) = 0$$

$\begin{cases} y_1 = e^t \\ y_2 = e^{2t} \end{cases}$ - בת"ל. לכן פתרונות בת"ל של המערכת הם:

$$\vec{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \vec{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ -e^t & -2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

למערכת האי הומוגנית הפתרון $Y\vec{\alpha}$ כאשר $\vec{\alpha}' = Y^{-1}b$. בשבילנו:

$$\vec{\alpha}' = \frac{1}{-e^{3t}} \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{2t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+t)\,e^{-t} \\ -(1+t)\,e^{-2t} \end{pmatrix}$$

נבצע אינטגרל:

$$\vec{\alpha} - \begin{pmatrix} -(2+t)\,e^{-t} - e^{-t} \\ \frac{1}{2}(1+t)\,e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} \end{pmatrix} + \text{const} = \begin{pmatrix} -(3+t)\,e^{-t} \\ \frac{1}{4}(3+2t)\,e^{-2t} \end{pmatrix} + \text{const}$$

$$\vec{y} = Y\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ -e^t & -2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(3+t)\,e^{-t} \\ \frac{1}{4}(3+2t)\,e^{-2t} \end{pmatrix} + (*)$$

כאשר $(*)$ פתרון כללי של ההומוגני.

מערכות עם מקדמים קבועים

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

כאשר A קבועה, לא תלויה ב-t.

האקספוננציאל המטריציאלי

M מטריצה $n \times n$.

$$\exp(M) = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \ldots$$

האם זה מתכנס? ($n \times n$ אינסופיים)

ניתן לכתוב $M=UDU^{-1}$ כאשר D הוא בצורה נורמלית של ז'ורדן

$$M^2=UDU^{-1}UDU^{-1}=U\left(D^2\right)U^{-1}$$

$$\exp\left(M\right)=UU^{-1}+UDU^{-1}+\frac{UD^2U^{-1}}{2!}+...$$

$$=U\left(I+D+\frac{D^2}{2!}+\frac{D^3}{3!}+...\right)U^{-1}$$

מספיק להוכיח התכנסות למטריצה בצורה נורמלית של ז'ורדן.

אם M מטריצה עם בלוקים עושים חזקות לכל בלוק בנפרד. לכן, בפועל מספיק להוכיח לבלוק אחד של ז'ורדן.

$$M=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix},M^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \\ & \lambda^2 & 2\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda \\ & & & & \lambda^2\end{pmatrix},M^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & & \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & & & & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & & & & \lambda^3\end{pmatrix}$$

נסתכל על

$$I+M+\frac{M^2}{2!}+...+\frac{M^3}{3!}$$

אלכסון ראשי:

$$1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+...=e^\lambda$$

אלכסון מעל הראשי

$$1+\frac{2\lambda}{2!}+\frac{3\lambda^2}{3!}+\frac{4\lambda^3}{4!}+...=e^\lambda$$

האלכסון הבא

$$\frac{1}{2}+\frac{3\lambda}{3!}+\frac{6\lambda^2}{4!}+...=\frac{e^\lambda}{2}$$

ניתן לבדוק כך שהכל מתכנס.