אינטגרציה - המשך

שיטת רומברג

$$E_T \le (b-a)\,\frac{w^2}{12}M$$

$$M = \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

a,b קבועים, ולכן גם M קבוע. לכן

$$w = \frac{b-a}{n}$$

$$k = \frac{(b-a)}{12}M$$

$$E_T \le kw^2$$

נסמן

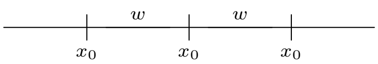
$$E_i = T_i - I \qquad E_{2i} = T_{2i} - I$$

$$\boxed{E_{2i} \approx \frac{E_i}{4}}$$

$$T_{2i} - I \approx \frac{T_i - I}{4}$$

$$\boxed{I \approx \frac{4T_{2i} - T_i}{3} =: T_{2i}^{(1)}}$$

נוכיח שזה נותן תוצאה יותר מדויקת:
נניח שיש לנו שני טרפזים, כל אחד על אינטרוול ברוחב w:



$$T_1 = \frac{\cancel{2}w}{\cancel{2}}\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_2\right)\right)+\frac{w}{2}\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)=wf\left(x_0\right)+wf\left(x_2\right)$$

$$T_2 = \frac{w}{2}\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right)+\frac{w}{2}\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)=\frac{w}{2}\left(f\left(x_0\right)+2f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)$$

$$T_2^{(1)} = \frac{w}{3}\left(2f\left(X_0\right)+4f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)-f\left(x_2\right)\right)=\frac{w}{3}\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)$$

וקיבלנו שזה שקול, מבחינת הדיוק, לשיטת סימפסון מסדר 4!
במקרה הכללי:

$$T_{2i}^{(1)}=\frac{4T_{2i}-T_i}{3} \qquad E_S \le (b-a)\frac{w^4}{180}M$$

$$T_{4i}^{(1)}=\frac{4T_{4i}-T_{2i}}{3}$$

$$S_{2i}=T_{2i}^{(1)} \qquad S_{4i}=T_{4i}^{(1)}$$

$$\begin{array}{l} E_{2i}=S_{2i}-I \\ E_{4i}=S_{4i}-I \end{array} \Rightarrow E_{4i}\approx\frac{E_{2i}}{16}\Rightarrow S_{4i}-I=\frac{S_{2i}-I}{16}$$

$$I\approx\frac{16T_{4i}^{(1)}-T_{2i}^{(1)}}{15}=T_{4i}^{(2)}$$

הנוסחה הכללית היא

$$\boxed{T_{2i}^{(j)}=\frac{4^iT_{2i}^{(j-1)}-T_i^{(j-1)}}{4^j-1}}$$

ניתן לפתור את זה באמצעות תכנות דינאמי

Gauss-Quadrature

במקום להעביר את השוק העליונה של הטרפז דרך הנקודות בקצוות הקטע, נבחר נקודות בתוך הקטע.
כלומר במקום

$$A=\frac{w}{2}f\left(x\right)+\frac{w}{2}f\left(B\right)$$

$$A=Pf\left(a\right)+Qf\left(b\right)$$

נרצה

$$A = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$$

אבל איך בוחרים את x_1, x_2?

$$\begin{cases} f(x)=1 \\ f(x)=x \\ f(x)=x^2 \\ f(x)=x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2 \\ \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1x_1 + C_2x_2 = 0 \\ C_1x_1^2 + C_2x_2^2 = \frac{2}{3} \\ C_1x_1^3 + C_2x_2^3 \end{cases}$$

אנחנו מעוניינים רק בx_1, x_2, ולכן נניח $\begin{matrix} C_1 = C_2 = 1 \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$ ואז

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$2x_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

וקיבלנו נקודות שצריך לבחור עבור אינטגרל על $[-1,1]$ - ולא משנה מה הפונקציה!

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = f(-0.57735) + f(0.57755)$$

דוגמה

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0 + 1 = 1$$

נרצה לחשב את זה באמצעות Gauss-Quadrantures. נצטרך להפוך את זה לאינטגרל בין 1- ל1 - לכן נצטרך לבצע החלפת משתנה לx כך ש $\begin{matrix} t=0 & \Leftrightarrow & x=-1 \\ t=\infty & \Leftrightarrow & x=1 \end{matrix}$. נבחר

$$t = \frac{x+1}{x-1} \qquad \mathrm{d}t = \frac{(x-1)\ \mathrm{d}x - (x+1)\ \mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}(-2)}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

תרגיל

$$f\left(x\right)=6-6x^{5}$$

$$\int_{0}^{1}6-6x^{5}\,\mathrm{d}x=5$$

$$\int_{0}^{1}6-6x^{5}\,\mathrm{d}x$$

$$x=\frac{1+x'}{2}\qquad\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x'$$

$$\int_{-1}^{1}\left(6-6\left(\frac{1+x'}{2}\right)^{5}\right)\,\mathrm{d}x'=\int_{-1}^{1}3-3\left(\frac{1+x'}{2}\right)^{5}\,\mathrm{d}x'=\cdots=5.0833\ldots$$