

תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום). תהי תמורה $\sigma \in S_9$ המוגדרת לפי $\sigma(i) = 10 - i$. כתבו את σ כטבלה, כמכפלת מחזורים זרים ומצאו את הסימן שלה.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת-חבורות שלה.

א. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$, אז $H = K$ או $H \cap K = \{e\}$.

ב. הוכיחו שאם $|H| = 1000$ ו- $|K| = 77$, אז $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 3. יהי p ראשוני קבוע, ותהינה G, H חבורות. חבורה נקראת חבורת- p , אם הסדר של כל איבר בה הוא חזקה של p (כלומר מן הצורה p^i עבור $i \geq 0$ כלשהו התלוי באיבר).

א. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G היא חבורת- p , אז $\text{im } f$ חבורת- p .

ב. נניח $G \cong H$. הסיקו כי G היא חבורת- p אם ורק אם H היא חבורת- p .

ג. הפריכו את הכיוון ההפוך לסעיף הראשון: אם $\text{im } f$ היא חבורת- p , אז G היא חבורת- p .

שאלה 4. יהי $n \in \mathbb{N}$, ותהי G חבורה. נגדיר פונקציות $f_n: G \rightarrow G$ לפי $f_n(g) = g^n$.

א. הוכיחו שהפונקציה f_2 היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. מצאו חבורה G לא אבלית עבורה f_{12} היא הומומורפיזם. הוכיחו זאת וחשבו את

$|\ker f_{12}|$ ו- $|\text{im } f_{12}|$. האם לחבורה שמצאתם f_4 היא הומומורפיזם? האם f_6 ?

רמז: מסקנה ממשפט לגראנז' יכולה לעזור בבחירת G .

שאלה 5. תהי G חבורה. נסמן את קבוצת האוטומורפיזמים של G בסימון $\text{Aut}(G)$.

א. הוכיחו כי $\text{Aut}(G)$ היא חבורה ביחס לפעולה של הרכבת פונקציות.

ב. (אתגר) מצאו את כל איברי $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ במפורש והוכיחו שהיא לא ציקלית. רמז: החבורה \mathbb{Z}_8 ציקלית.

שאלה 6. יהי n מספר טבעי.

א. (חימום) הוכיחו כי אוסף כל התמורות הזוגיות A_n הוא תת-חבורה של S_n .

ב. (יותר קשה) הוכיחו כי החבורה S_n איזומורפית לתת-חבורה של A_{n+2} .

שאלה 7. מצאו תנאי על n כך שלחבורה \mathbb{Z}_n יהיו בדיוק שתי תת-חבורות.

קצת יותר קשה: מהו התנאי על n כך שיהיו בדיוק שלוש תת-חבורות? בדיוק ארבע

תת-חבורות? הוכיחו את קביעותיכם.

שאלה 8 (אתגר). תהי G חבורה ונתבונן בפונקציות $f(x) = x^3, g(x) = x^4, h(x) = x^5$ ו-

מהחבורה לעצמה. הוכיחו שהפונקציות האלו הן הומומורפיזמים (כולן יחד) אם ורק אם G אבלית.

בהצלחה!